УДК 517.711.3

ЗАДАЧА ТЕРМОКОНВЕКЦИИ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ МОДЕЛИ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ НЕНУЛЕВОГО ПОРЯДКА

Т.Г. Сукачева

THE THERMOCONVECTION PROBLEM FOR THE LINEARIZIED MODEL OF THE INCOMPRESSIBLE VISCOELASTIC FLUID OF THE NONZERO ORDER

T.G. Sukacheva

Рассматривается линеаризованная модель термоконвекции несжимаемой вязкоупругой жидкости ненулевого порядка. На основе теории относительно p-секториальных операторов и вырожденных полугрупп операторов доказана теорема существования единственного решения задачи Коши–Дирихле для соответствующей системы дифференциальных уравнений в частных производных, и получено описание расширенного фазового пространства указанной задачи.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа, несжимаемая вязкоупругая жидкость, относительно p-секториальный оператор, расширенное фазовое пространство.

The Cauchy – Dirichlet problem for the linearized system modeling thermoconvection of the incompressible viscoelastic fluid of the nonzero order is considered. This problem is investigated on the base of the theory of relatively p-sectorial operators and degenerative semi-groups of operators. The theorem of the existence of the unique solution of this problem is proved and the description of its extended phase space is received.

Keywords: Sobolev type equation, an incompressible viscoelastic fluuid, relatively p-sectorial operator, extended phase space.

Введение

Система уравнений

$$\begin{cases} (1-\lambda\nabla^2)\mathbf{v}_t = \nu\nabla^2\mathbf{v} - (\tilde{\mathbf{v}}\cdot\nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\tilde{\mathbf{v}} + \\ \sum\limits_{l=1}^{k}\beta_l\nabla^2\mathbf{w}_l - g\gamma\theta - \nabla p + \mathbf{f}, \\ 0 = \nabla\cdot\mathbf{v}, \\ \dfrac{\partial\mathbf{w}_l}{\partial t} = \mathbf{v} + \alpha_l\mathbf{w}_l \ \ , \alpha_l \in \mathbb{R}_-, \quad l = \overline{1,\ k}, \\ \theta_t = \kappa\nabla^2\theta - \mathbf{v}\cdot\nabla\theta + \mathbf{v}\cdot\gamma \end{cases} \tag{1}$$

получена на основе линеаризованной системы Осколкова ненулевого порядка [1, 2] и приближенного уравнения теплопроводности, моделирующего термоконвекцию несжимаемой вязкоупругой жидкости. Она моделирует эволюцию скорости $\mathbf{v} = (v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n)$, $\quad v_i = v_i(x,t)$, градиента давления $\nabla p = (p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n)$, $\quad p_i = p_i(x,t)$ и температуры $\theta = \theta(x,t)$ неньютоновской жидкости — несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта ненулевого порядка. Параметры $\lambda \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}_+$ и $\kappa \in \mathbb{R}_+$ характеризуют упругость, вязкость и теплопроводность жидкости соответственно; $g \in \mathbb{R}_+$ — ускорение свободного падения; вектор $\gamma = (0,\ \ldots,\ 0,\ 1)$ — орт в $\mathbb{R}^n$. Параметры $\beta_l \in \mathbb{R}_+$, $\quad l = \overline{1,\ k}$ определяют время ретардации (запаздывания) давления. Свободный член $\mathbf{f} = (f_1,\ \ldots,\ f_n)$, $\quad f_i = f_i(x,t)$, отвечает внешнему воздействию на жидкость, а вектор-функция $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n)$, $\tilde{v}_k = \tilde{v}_k(x)$ соответствует стационарному решению исходной системы [1, 2]. В [3] содержится обоснование линеаризованной модели несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта нулевого порядка.

Рассмотрим первую начально-краевую задачу

$$
\begin{array}{llll}
\mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_0(x), & \mathbf{w}_l(x,0) = \mathbf{w}_{l_0}(x), & \theta(x,0) = \theta_0(x), & \forall x \in \Omega; \\
\mathbf{v}(x,t) = 0, & \mathbf{w}_l(x,t) = 0, & \theta(x,t) = 0, & \forall (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+
\end{array}
\tag{2}
$$

для системы (1). Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2,3,4$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $\mathcal{C}^\infty$.

Впервые задачу термоконвекции для несжимаемых вязкоупругих жидкостей Кельвина – Фойгта поставил А.П.Осколков [4]. Им же была исследована разрешимость задачи (2) для соответствующей нелинейной модели нулевого порядка в случае $\lambda^{-1} > -\lambda_1$ (λ_1 – наименьшее собственное значение задачи Дирихле для оператора Лапласа в области Ω)[5]. Первая начально-краевая задача для этой модели рассматривалась в [3, 6], а для ее модификации на случай плоско-параллельного течения в [7]. В этих работах изучалась ситуация, когда свободный член $\mathbf{f}$ не зависит от времени, а в [8] — указанная неавтономная задача. Нестационарная линеаризованная модель нулевого порядка изучалась в [9], а ее обобщение в [10].

Нашей целью является изучение разрешимости задачи (1), (2) при нестационарном свободном члене $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x,t)$. Эту задачу мы исследуем в рамках теории полулинейных уравнений соболевского типа. Основным инстументом исследования является понятие относительно p-секториального оператора и порожденной им разрешающей вырожденной полугруппы операторов. Доказана теорема существования единственного решения указанной задачи и получено описание ее расширенного фазового пространства. Статья состоит из трех частей. В первой части приводятся известные результаты из теории полулинейных уравнений соболевского типа, необходимые нам в дальнейшем [3, 8]. Во второй части проводится редукция задачи (1), (2) к полулинейному уравнению соболевского типа. В третьей части устанавливается существование квазистационарных полутраекторий указанной задачи и описывается ее расширенное фазовое пространство. Отметим, что результаты этой статьи обобщают результаты [11] .

1. Полулинейные уравнения соболевского типа

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ — банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, т.е. линеен и непрерывен, $\ker L \neq \{0\}$; оператор $M : \operatorname{dom} M \to \mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен в $\mathcal{U}$, т.е. $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Через $\mathcal{U}_M$ обозначим линеал $\operatorname{dom} M$, снабженный нормой графика $|||\cdot||| = \|M\cdot\|_{\mathcal{F}} + \|\cdot\|_{\mathcal{U}}$. Пусть оператор $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M;\mathcal{F})$, функция $f \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+;\mathcal{F})$.

Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{3}$$

для *полулинейного нестационарного уравнения соболевского типа*

$$L\,\dot{u} \;=\; M\,u \;+\; F(u) \;+ f(t). \tag{4}$$

Определение 1. *Локальным решением (далее просто — решением) задачи (3), (4) назовем вектор-функцию $u \in \mathcal{C}^\infty((0,T);\mathcal{U}_M)$, удовлетворяющую уравнению (4) и такую, что $u(t) \to u_0$ при $t \to 0+$.*

Введем в рассмотрение L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})\}$ и L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M.

Определение 2. *Оператор M называется (L,p)-секториальным, если существуют константы $a \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{R}_+,\ \Theta \in (\frac{\pi}{2},\pi)$ такие, что*

(i) $S^L_{\Theta,a}(M) = \{\mu \in \mathbb{C} :\ |\arg(\mu - a)| < \Theta\ ,\ \ \mu \neq a\ \} \subset \rho^L(M)\ ;$

(ii) $\max\{\ \ \| R^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})},\qquad \| L^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}\}\ \le\ \dfrac{k}{\prod_{q=0}^{p}|\mu_q - a|}$

при любых $\mu,\ \mu_0,\ \mu_1,\ \dots\ ,\mu_p \in S^L_{\Theta,a}(M)$.

Здесь

$$R^L_{(\mu,p)}(M) = \Pi_{q=0}^{p} R^L_{\mu_q}(M), \qquad L^L_{(\mu,p)}(M) = \Pi_{q=0}^{p} L^L_{\mu_q}(M)$$

соответственно правая и левая (L,p)-резольвенты оператора M, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ [12].

Определение 3. *Оператор M называется сильно (L,p)-секториальным, если он (L,p)-секториален и при всех $\mu,\ \mu_0,\dots,\ \mu_p \in S^L_{\Theta,a}(M)$*

$$\text{(i)}\ \| M R^L_{(\mu,p)}(M)\,(\,\mu L - M\,)^{-1} f\|_{\mathcal{F}} \le \frac{\mathrm{const}(f)}{|\mu - a|\prod_{q=0}^{p}|\mu_q - a|}$$

при всех f из некоторого плотного в $\mathcal{F}$ линеала;

$$\text{(ii)}\ \|\,(\,\mu L - M\,)^{-1} L^L_{(\mu,p)}(M)\,\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})} \le \frac{\mathrm{const}}{|\mu - a|\prod_{q=0}^{p}|\mu_q - a|}.$$

Замечание 1. Если $p = 0$, то (L,p)- и сильно (L,p)-секториальный оператор M называется соответственно L- и сильно L-секториальным [3].

Будем рассматривать задачу (3), (4) в предположении, что оператор M сильно (L,p)-секториален. При условии сильной (L,p)-секториальности оператора M решение задачи (3), (4) может быть неединственным, что показывает пример, приведенный в [13]. Поэтому сузим понятие решения уравнения (4). Также известно [14] – [16], что решения задачи (3), (4) существуют не для всех $u_0 \in \mathcal{U}_M$. Поэтому введем два определения.

Определение 4. *Множество $\mathcal{B}^t \subset \mathcal{U}_M \times \bar{\mathbb{R}}_+$ назовем расширенным фазовым пространством уравнения (4), если для любой точки $u_0 \in \mathcal{U}_M$ такой, что $(u_0,0) \in \mathcal{B}^0$ существует единственное решение задачи (3), (4), причем $(u(t),t) \in \mathcal{B}^t$.*

Замечание 2. Если $\mathcal{B}^t = \mathcal{B} \times \bar{\mathbb{R}}_+$, где $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}_M$, то множество $\mathcal{B}$ называется *фазовым пространством* уравнения (4). Ранее вместо термина «расширенное фазовое пространство» использовался термин «конфигурационное пространство» [8], что вносило некоторую путаницу в терминологию [17].

Определение 5. *Пусть пространство* $\mathcal{U}$ *расщепляется в прямую сумму* $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \oplus \mathcal{U}_1$ *так, чтобы* $\ker L \subset \mathcal{U}_0$. *Решение* $u = v + w$, *где* $v(t) \in \mathcal{U}_0$, *а* $w(t) \in \mathcal{U}_1$ *при всех* $t \in (0, T)$, *уравнения (4) назовем квазистационарной полутраекторией, если* $L\dot{v} \equiv 0$.

Замечание 3. Понятие *квазистационарной полутраектории* обобщает понятие *квазистационарной траектории,* введенное для динамического случая [13, 15, 16].

В силу того, что оператор M сильно (L, p)-секториален, пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ расщепляются в прямые суммы $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$ [12], где

$$\mathcal{U}^0 = \{\varphi \in \mathcal{U} : U^t\varphi = 0 \ \ \exists t \in \mathbb{R}_+\}, \quad \mathcal{F}^0 = \{\psi \in \mathcal{F} : F^t\psi = 0 \ \ \exists t \in \mathbb{R}_+\} \ -$$

ядра, а

$$\mathcal{U}^1 = \{u \in \mathcal{U} : \lim_{t\to 0+} U^t u = u\}, \quad \mathcal{F}^1 = \{f \in \mathcal{F} : \lim_{t\to 0+} F^t f = f\} \ -$$

образы аналитических разрешающих полугрупп

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \qquad F^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu,$$

($\Gamma \subset S^L_{\Theta,a}(M)$ — контур такой, что $\arg\mu \to \pm\Theta$ при $|\mu| \to +\infty$) линейного однородного уравнения $L\dot{u} = Mu$.

Обозначим через $L_k(M_k)$ сужение оператора $L(M)$ на $\mathcal{U}^k$ ($\mathcal{U}^k \cap \operatorname{dom} M$), $k = 0,\ 1$. Тогда $L_k : \mathcal{U}^k \to \mathcal{F}^k$, $M_k : \mathcal{U}^k \cap \operatorname{dom} M \to \mathcal{F}^k$, $k = 0,\ 1$, причем сужения M_0 и L_1 операторов M и L на пространства $\mathcal{U}^0 \cap \operatorname{dom} M$ и $\mathcal{U}^1$ соответственно являются линейными непрерывными операторами и имеют ограниченные обратные операторы. Эти утверждения следуют из соответствующих результатов [12]. Поэтому приведем уравнение (4) к эквивалентной форме

$$\begin{aligned} R\dot{u}^0 &= u^0 + G(u) + g(t) \qquad u^0(0) = u^0_0, \\ \dot{u}^1 &= Su^1 + H(u) + h(t) \qquad u^1(0) = u^1_0, \end{aligned} \tag{5}$$

где $u^k \in \mathcal{U}^k$, $k = 0, 1$, $u = u^0 + u^1$, операторы $R = M_0^{-1}L_0$, $S = L_1^{-1}M_1$, $G = M_0^{-1}(I - Q)F$, $H = L_1^{-1}QF$, $g = M_0^{-1}(I - Q)f$, $h = L_1^{-1}Qf$. Здесь $Q \in \mathcal{L}(F)(\equiv \mathcal{L}(F; F))$ — проектор, расщепляющий пространство $\mathcal{F}$ требуемым образом.

Определение 6. *Систему уравнений (5) назовем нормальной формой уравнения (4).*

Замечание 4. В случае, когда оператор M сильно L-секториален, нормальная форма уравнения (4) (в случае $f(t) \equiv 0$) имеет вид (5.1) в [7].

В дальнейшем ограничимся изучением таких квазистационарных полутраекторий уравнения (4), для которых $R\dot{u}^0 \equiv 0$. Для этого предположим, что оператор R — *бирасщепляющий* [18], т.е. его ядро $\ker R$ и образ $\operatorname{im} R$ дополняемы в пространстве $\mathcal{U}$. Положим $\mathcal{U}^{00} = \ker R$, а через $\mathcal{U}^{01} = \mathcal{U}^0 \ominus \mathcal{U}^{00}$ обозначим некоторое дополнение к подпространству $\mathcal{U}^{00}$. Тогда первое уравнение нормальной формы (5) редуцируется к виду

$$R\dot{u}^{01} = u^{00} + u^{01} + G(u) + g(t), \tag{6}$$

где $u = u^{00} + u^{01} + u^1$.

Теорема 1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален, а оператор R – бирасщепляющий. Пусть существует квазистационарная полутраектория $u = u(t)$ уравнения* (4). *Тогда она удовлетворяет соотношениям*

$$0 = u^{00} + u^{01} + G(u) + g(t), \quad u^{01} = \mathrm{const}. \tag{7}$$

Доказательство. Первое соотношение вытекает из (6) в силу требования квазистационарности $R\dot{u}^0 = R\dot{u}^{01} \equiv 0$. Второе соотношение вытекает из тождества $R\dot{u}^{01} \equiv 0$, так как по теореме Банаха об обратном операторе сужение оператора $Q_R R(I - P_R)$ на $\mathcal{U}^{01}$ есть непрерывно обратимый оператор. Здесь Q_R и P_R — проекторы на $\mathrm{im}\, R$ и $\ker\, R$ соответственно, $\ker\, P_R = \mathcal{U}^{01}$. □

Замечание 5. Второе соотношение в (7) поясняет смысл термина «квазистацинарные полутраектории», т.е. это такие полутраектории, которые «стационарны по некоторым переменным». Другими словами, квазистационарная полутраектория обязательно лежит в некоторой плоскости $(I - P_R)u^0 = \mathrm{const}$.

Теорема 1 устанавливает необходимые условия существования квазистационарной полутраектории уравнения (4). Перейдем к рассмотрению достаточных условий. Известно, что при условии сильной (L,p)-секториальности оператора M оператор S секториален [12]. Значит, он порождает на $\mathcal{U}^1$ аналитическую полугруппу, которую мы обозначим через $\{U_1^t : t \geq 0\}$, так как в действительности оператор U_1^t есть сужение оператора U^t на $\mathcal{U}^1$. Из того, что $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ следует, что существует проектор $P \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, соответствующий данному расщеплению. Можно показать, что $P \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M)$ [12]. Тогда пространство $\mathcal{U}_M$ расщепляется в прямую сумму $\mathcal{U}_M = \mathcal{U}_M^0 \oplus \mathcal{U}_M^1$ так, что вложение $\mathcal{U}_M^k \subset \mathcal{U}^k, \quad k = 0,\ 1$, плотно и непрерывно. Символом A'_v обозначена производная Фреше в точке $v \in \mathcal{V}$ оператора A, определенного на некотором банаховом пространстве $\mathcal{V}$.

Теорема 2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален, оператор R — бирасщепляющий, оператор $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$, а вектор-функция $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{F})$. Пусть*

(i) *в некоторой окрестности $\mathcal{O}_{u_0} \subset \mathcal{U}_M$ точки u_0 выполнено соотношение*

$$0 = u_0^{01} + (I - P_R)(G(u^{00} + u_0^{01} + u^1) + g(t)); \tag{8}$$

(ii) *проектор $P_R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$, и оператор $I + P_R G'_{u_0^0} : \mathcal{U}_M^{00} \to \mathcal{U}_M^{00}$ — топлинейный изоморфизм ($\mathcal{U}_M^{00} = \mathcal{U}_M \cap \mathcal{U}^{00}$);*

(iii) *для аналитической полугруппы $\{U_1^t : t \geq 0\}$ выполнено соотношение*

$$\int_0^\tau \|U_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1; \mathcal{U}_M^1)} dt < \infty \qquad \forall \tau \in \mathbb{R}_+. \tag{9}$$

Тогда существует единственное решение задачи (3), (4), *являющееся квазистационарной полутраекторией уравнения* (4).

Доказательство. Рассмотрим окрестность $\mathcal{O}_{u_0}$ точки u_0. В этой окрестности первое уравнение (5) приобретет вид

$$0 = u^{00} + P_R(G(u^{00} + u_0^{01} + u^1) + g(t)) \tag{10}$$

в силу условия (i). Далее, из (i) в силу теоремы о неявной функции существуют окрестности $\mathcal{O}_{u_0^{00}} \subset \mathcal{U}_M^{00}$, $(\mathcal{U}_M^{00} = \mathcal{U}^{00} \cap \mathcal{U}_M)$ $\mathcal{O}_{u_0^1} \subset \mathcal{U}_M^1$ $(\mathcal{U}_M^1 = \mathcal{U}^1 \cap \mathcal{U}_M)$ точек $u_0^{00} = P_R(I-P)u_0$, u_0^1 соответственно и отображение $\delta : \mathcal{O}_{u_0^1} \to \mathcal{O}_{u_0^{00}}$ класса $\mathcal{C}^\infty$ такое, что уравнение

$$u^{00} = \delta(u^1, t) \tag{11}$$

эквивалентно уравнению (10).

Теперь в силу (11) второе уравнение (5) в окрестности $\mathcal{O}_{u_0^1}$ приобретет вид

$$\dot{u}^1 = Su^1 + H(\delta(u^1) + u_0^{01} + u^1) + h(t), \tag{12}$$

где оператор $H((I+\delta)(\cdot) + u_0^{01}) : \mathcal{O}_{u_0^1} \to \mathcal{U}^1$ принадлежит классу $\mathcal{C}^\infty$ по построению.

Для доказательства однозначной разрешимости задачи $u^1(0) = u_0^1$ для уравнения (12) воспользуемся методом Соболевского–Танабэ, изложенным в [19, глава 9]. В силу (iii), гладкости оператора H и вектор-функции h все условия теорем 9.4, 9.6 и 9.7 в [19] выполнены. Поэтому если $u_0^1 \in \mathcal{U}_M^1$, то при некотором $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственное решение $u^1 = u^1(t)$, $t \in [0,T)$ уравнения (12) такое, что $u^1(t) \to u_0^1$ при $t \to 0+$ в топологии $\mathcal{U}_M^1$.

Итак, решение задачи (3), (4) в данном случае будет иметь вид $u = u^1 + \delta(u^1) + u_0^{01}$, и это решение будет квазистационарной полутраекторией по построению. □

Замечание 6. Для любой квазистационарной полутраектории уравнения (4) соотношение (8) непосредственно вытекает из первого уравнения (7).

Замечание 7. Условие (9) для обычных аналитических полугрупп, имеющих оценку $\|U_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{U}_M^1)} < t^{-1}\mathrm{const}$, не выполняется. В дальнейшем мы собираемся использовать теорему 2 именно в такой ситуации, и потому необходимо сделать некоторые пояснения. Пусть $\mathcal{U}_\alpha^1 = [\mathcal{U}^1; \mathcal{U}_M^1]_\alpha$, $\alpha \in [0,1]$ — некоторое интерполяционное пространство, построенное по оператору S. В теореме 2 условие «оператор $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M^1; \mathcal{F})$, вектор-функция $f \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+; \mathcal{F})$ «дополним условием» оператор $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M^1; \mathcal{U}_\alpha^1)$, $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{U}_\alpha^1)$,» а соотношение (9) заменим соотношением

$$\int_0^\tau \|U_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{U}_\alpha^1)} dt < \infty \qquad \forall \tau \in \mathbb{R}_+. \tag{13}$$

Тогда утверждение теоремы 2 не изменится. Обсуждение этого круга вопросов см. в [19, глава 9].

Замечание 8. Пусть выполнены условия теоремы 2 (возможно, с учетом замечания 7). Построим плоскость $\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{U}_M : (I - P_R)(I-P)u = u_0^{01}\}$ и множество $\mathcal{M} = \{u \in \mathcal{U}_M : P_R((I-P)u + G(u) + g(t)) = 0\}$. По условию теоремы их пересечение $\mathcal{A} \cap \mathcal{M} \neq \varnothing$, так как содержит по крайней мере точку u_0. Более того, существует $\mathcal{C}^\infty$-диффеоморфизм $I + \delta$, отображающий окрестность $\mathcal{O}_{u_0^1}$ на некоторую окрестность $\mathcal{O}_{u_0} \subset \mathcal{A} \cap \mathcal{M}$. Следовательно, в качестве начального значения можно брать не только точку u_0, но и любую из некоторой ее окрестности $\mathcal{O}_{u_0}$. Это значит, что $\mathcal{O}_{u_0}$ является частью *расширенного фазового пространства* $\mathcal{B}^t$ уравнения (4).

Теперь пусть $\mathcal{U}_k$ и $\mathcal{F}_k$ — банаховы пространства, операторы $A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_k, \mathcal{F}_k)$, а операторы $B_k : \operatorname{dom} B_k \to \mathcal{F}$ линейны и замкнуты с областями определений $\operatorname{dom} B_k$ плотными в $\mathcal{U}_k$, $k = 1, 2$. Построим пространства $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ и операторы $L = A_1 \otimes A_2$, $M = B_1 \otimes B_2$. По построению оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, а оператор $M : \operatorname{dom} M \to \mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен, $\operatorname{dom} M = \operatorname{dom} B_1 \times \operatorname{dom} B_2$.

Теорема 3. *[20] Пусть операторы B_k сильно (A_k, p_k)-секториальны, $k = 1, 2$; причем $p_1 \geq p_2$. Тогда оператор M сильно (L, p_1)-секториален.*

2. Редукция к полулинейному уравнению соболевского типа

Рассмотрим задачу (2) для системы (1), представленной в виде

$$\begin{cases} (1-\lambda\nabla^2)\mathbf{v}_t = \nu\nabla^2\mathbf{v} - (\tilde{\mathbf{v}}\cdot\nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\tilde{\mathbf{v}} + \\ \sum\limits_{l=1}^{k}\beta_l\nabla^2\mathbf{w}_l - g\gamma\theta - \mathbf{p} + \mathbf{f}, \\ 0 = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}), \\ \dfrac{\partial\mathbf{w}_l}{\partial t} = \mathbf{v} + \alpha_l\mathbf{w}_l \ \ , \alpha_l \in \mathbb{R}_-, \quad l = \overline{1,\ k}, \\ \theta_t = \kappa\nabla^2\theta - \mathbf{v}\cdot\nabla\theta + \mathbf{v}\cdot\gamma. \end{cases} \tag{14}$$

Здесь $\mathbf{p} = \nabla p$, т.к. во многих гидродинамических задачах знание градиента давления предпочтительнее, чем знание давления [21]. Впервые такая замена уравнения неразрывности сделана в [22]. Нас будет интересовать локальная однозначная разрешимость задачи (14), (2), эквивалентной исходной задаче (1), (2). Эту задачу удобно рассматривать в рамках теории полулинейных уравнений соболевского типа, изложенной вкратце в п.1.

Для того, чтобы редуцировать задачу (14), (2) к задаче (3), (4) введем, следуя [22], пространства $\mathbf{H}^2_\sigma$, $\mathbf{H}^2_\pi$, $\mathbf{H}_\sigma$ и $\mathbf{H}_\pi$. Здесь $\mathbf{H}^2_\sigma$ и $\mathbf{H}_\sigma$ — подпространства соленоидальных функций в пространствах $(W^2_2(\Omega))^n \cap (\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))^n$ и $(L_2(\Omega))^n$ соответственно, а $\mathbf{H}^2_\pi$ и $\mathbf{H}_\pi$ — их ортогональные (в смысле $(L_2(\Omega))^n$) дополнения. Через Σ обозначим ортопроектор на $\mathbf{H}_\sigma$, причем его сужение на пространство $(W^2_2(\Omega))^n \cap (\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))^n$ будем обозначать тем же символом. Положим $\Pi = I - \Sigma$.

Формулой $A = \nabla^2 E_n : \mathbf{H}^2_\sigma \oplus \mathbf{H}^2_\pi \to \mathbf{H}_\sigma \oplus \mathbf{H}_\pi$, где E_n — единичная матрица порядка n, зададим линейный непрерывный оператор с дискретным конечнократным спектром $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, сгущающимся лишь на $-\infty$. Формулой $B : \mathbf{v} \to \nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})$ зададим линейный непрерывный сюръективный оператор $B : \mathbf{H}^2_\sigma \oplus \mathbf{H}^2_\pi \to \mathbf{H}_\pi$ с ядром $\ker\, B = \mathbf{H}^2_\sigma$.

Положим $\mathcal{U}_{10} = \mathbf{H}^2_\sigma \times \mathbf{H}^2_\pi \times \mathbf{H}_p$, $\mathcal{F}_{10} = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \mathbf{H}_p$, где $\mathbf{H}_p = \mathbf{H}_\pi$; $\mathcal{U}_{1i} = \mathbf{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1 = \mathbf{H}^2_\sigma \times \mathbf{H}^2_\pi$, и $\mathcal{F}_{1i} = \mathbf{L}_2 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi$, $i = \overline{1,\ k}$. Тогда пространства $\mathcal{U}_1 = \oplus_{l=0}^k \mathcal{U}_{1l}$, $\mathcal{F}_1 = \oplus_{l=0}^k \mathcal{F}_{1l}$. Операторы A_1 и B_1 : $\mathcal{U}_1 \to \mathcal{F}_1$ определим формулами $A_1 = \mathrm{diag}\,[\hat{A}_1\ , E_k]$, где

$$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} \check{A}_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \check{A}_1 = \begin{pmatrix} \Sigma(I-\lambda A)\Sigma & \Sigma A(I-\lambda A)\Pi \\ \Pi(I-\lambda A)\Sigma & \Pi A(I-\lambda A)\Pi \end{pmatrix};$$

$B_1 = \left(B_1^{ij}\right)^2_{i,j=1}$, где

$$B_1^{11} = \begin{pmatrix} \nu\Sigma A & \nu\Sigma A & O \\ \nu\Pi A & \nu\Pi A & -I \\ O & B & O \end{pmatrix}, \quad B_1^{12} = \begin{pmatrix} \beta_1\Sigma A & \dots & \beta_k\Sigma A \\ \beta_1\Pi A & \dots & \beta_k\Pi A \\ O & \dots & O \end{pmatrix},$$

B_1^{21} содержит k строк вида $(I,\ I,\ O)$, $B_1^{22} = \mathrm{diag}\,[\alpha_1, \dots, \alpha_k]$.

Замечание 9. Пространство $\mathcal{U}_1$ ($\mathcal{F}_1$) определяется точно так же, как пространство $\mathcal{U}$ ($\mathcal{F}$) в модели [23], а оператор A_1 (B_1) совпадает с оператором L (M_1) в [23].

Замечание 10. Обозначим через A_σ сужение оператора ΣA на $\mathbf{H}^2_\sigma$. По теореме Солонникова-Воровича-Юдовича спектр $\sigma(A_\sigma)$ вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается лишь на $-\infty$.

Теорема 4. (i) *Операторы* $A_1, B_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_1; \mathcal{F}_1)$, *и, если* $\lambda^{-1} \notin \sigma(A)$, *то оператор* A_1 — *бирасщепляющий,* $\ker A_1 = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{H}_p \times \underbrace{\{0\} \times \ldots \times \{0\}}_{k}$, $\mathrm{im}\, A_1 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \{0\} \times \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \ldots \times \mathcal{F}_k$.

(ii) *Если* $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$, *то оператор* B_1 $(A_1, 1)$*-ограничен.*

Замечание 11. Доказательство теоремы 4 приведено в [8], только в другой терминологии. Впервые понятие относительно ограниченного оператора введенно в [24]. Случай относительно секториального оператора рассматривался в [7, 25, 26].

Далее положим $\mathcal{U}_2 = \mathcal{F}_2 = L_2(\Omega)$ и формулой $B_2 = \kappa\nabla^2 : \mathrm{dom}\, B_2 \to \mathcal{F}_2$ определим линейный замкнутый и плотно определенный оператор B_2, $\mathrm{dom}\, B_2 = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Если оператор A_2 положить равным I, то в силу секториальности оператора B_2 [27, гл. 1] справедлива

Теорема 5. *Оператор* B_2 *сильно* A_2*-секториален.*

Положим $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. Вектор u пространства $\mathcal{U}$ имеет вид $u = \mathrm{col}\ (u_\sigma, u_\pi, u_p, w_1, \ldots, w_k, u_\theta)$, где $\mathrm{col}\ (u_\sigma, u_\pi, u_p, w_1, \ldots, w_k) \in \mathcal{U}_1$, а $u_\theta \in \mathcal{U}_2$. Здесь $u_\sigma = \Sigma v$, $u_\pi = (I - \Sigma)v = \Pi v$, $u_p = \bar{p}$. Аналогичный вид имеет вектор $f \in \mathcal{F}$. Операторы L и M определим формулами $L = A_1 \otimes A_2$ и $M = B_1 \otimes B_2$. Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, а оператор M : $\mathrm{dom}\ M \to \mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен, $\mathrm{dom}\ M = \mathcal{U}_1 \times \mathrm{dom}\ B_2$.

Из теоремы 4 и замечания 2.1.1 [3] следует, что оператор B_1 сильно $(A_1, 1)$-секториален. В силу этого и теорем 3, 5 справедлива

Теорема 6. *Пусть* $\lambda^{-1} \notin \sigma(A)$, *тогда оператор* M *сильно* $(L, 1)$*-секториален.*

Перейдем к построению нелинейного оператора F. В данном случае его удобно представить в виде $F = F_1 \otimes F_2$, где $F_1 = F_1(u_\sigma, u_\pi, u_\theta) = \mathrm{col}\ (-\Sigma(((\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) - ((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) + g\gamma u_\theta), -\Pi(((\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) - ((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) + g\gamma u_\theta), \underbrace{0, \ldots, 0}_{k+1})$, а $F_2 = F_2(u_\sigma, u_\pi, u_\theta) = (u_\sigma + u_\pi) \cdot (\gamma - \nabla u_\theta)$.

Формально найдем производную Фреше F'_u оператора F в точке u,

$$F'_u = \begin{pmatrix} \Sigma a(u_\sigma, u_\pi) & \Sigma a(u_\sigma, u_\pi) & O & -g\Sigma\gamma \\ \Pi a(u_\sigma, u_\pi) & \Pi a(u_\sigma, u_\pi) & O & -g\Pi\gamma \\ O & O & O & O \\ (\gamma - \nabla u_\theta) \cdot (*) & (\gamma - \nabla u_\theta) \cdot (*) & O & -(u_\sigma + u_\pi) \cdot (*) \end{pmatrix},$$

где $a(u_\sigma, u_\pi) = -((*) \cdot \nabla)(\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) - ((\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) \cdot \nabla)(*)$, а на место символа $*$ следует ставить соответствующую координату вектора v в случае, когда мы хотим найти вектор $F'_u v$.

Далее, в нашем случае пространство $\mathcal{U}_M = \mathcal{U}_1 \times \mathrm{dom}\, B_2$ (в силу непрерывности оператора B_1). Используя стандартную технику (см., например, [15, 16]), нетрудно показать, что при любых $u \in \mathcal{U}_M$ оператор $F'_u \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$. Аналогично устанавливается, что вторая производная Фреше F''_u оператора F — непрерывный билинейный оператор из $\mathcal{U}_M \times \mathcal{U}_M$ в $\mathcal{F}$, а $F'''_u \equiv O$. Таким образом, справедлива

Теорема 7. *Оператор* $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$.

Вектор-функцию f представим в виде $f = f_1 \otimes f_2$, где $f_1 = \mathrm{col}(\Sigma\mathbf{f}, \Pi\mathbf{f}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k+1})$, $f_2 = 0$. Будем предполагать, что $f \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+; \mathcal{F})$. Итак, редукция задачи (14), (2) к задаче (3), (4) закончена. В дальнейшем всюду отождествляем задачи (14), (2) и (3), (4).

3. Расширенное фазовое пространство и квазистационарные полутраектории

Теперь перейдем к проверке выполнения условий теорем 1 и 2.

В силу теоремы 6 и соответствующих результатов [12] существует аналитическая полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ разрешающих операторов уравнения (4), которую в данном случае естественно представить в виде $U^t = V^t \otimes W^t$, где $V^t(W^t)$ — сужение оператора U^t на $\mathcal{U}_1(\mathcal{U}_2)$. Поскольку оператор B_2 секториален, то $W^t = \exp(tB_2)$, что влечет за собой $\mathcal{W}^\circ = \{0\}$ и $\mathcal{W}^1 = \mathcal{U}_2$.

Рассмотрим полугруппу $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$. В силу теорем 4 и 6 и цитируемой монографии [12] данная полугруппа продолжима до группы $\{V^t : t \in \mathbb{R}\}$. Ее ядро $\mathcal{V}^0 = \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$, где $\mathcal{U}_1^{00} = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{H}_p \times \{0\} \times \ldots \times \{0\}(= \ker A_1$ по теореме 5), а $\mathcal{U}_1^{01} = \Sigma A_\lambda^{-1} A_{\lambda\pi}^{-1}[\mathbf{H}_\pi^2] \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \underbrace{\{0\} \times \ldots \times \{0\}}_{k+1}$. Здесь $A_\lambda = I - \lambda A$, $A_{\lambda\pi}$ — сужение оператора ΠA_λ^{-1}на $\mathbf{H}_\pi$. Известно , что если $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$, то оператор $A_{\lambda\pi} : \mathbf{H}_\pi \to \mathbf{H}_\pi^2$ — топлинейный изоморфизм (см., например, [8]). Обозначим через $\mathcal{U}_1^1$ образ $\mathcal{V}^1$. Тогда пространство $\mathcal{U}_1$ разлагается в прямую сумму подпространств: $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01} \oplus \mathcal{U}_1^1$.

Построим оператор $R = B_{10}^{-1} A_{10} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01})$, где $A_{10}(B_{10})$ — сужение оператора $A_1(B_1)$ на $\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$. (Оператор B_{10}^{-1} существует в силу теоремы 6 и соответствующих результатов [12]). По построению $\ker R = \mathcal{U}_1^{00}$, а в [22] показано, что $\operatorname{im} R = \mathcal{U}_1^{00}$. Значит, оператор R — бирасщепляющий. Обозначим через P_R проектор пространства $\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$ на $\mathcal{U}_1^{00}$ вдоль $\mathcal{U}_1^{01}$. В силу конструкции пространства $\mathcal{U}_M$ проектор $P_R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$, где $\mathcal{U}_M^0 = \mathcal{U}_M \cap (\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01})(\equiv \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01})$. Зафиксируем это в следующем утверждении.

Лемма 1. *Пусть $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$. Тогда оператор R — бирасщепляющий, причем $P_R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$.*

Введем в рассмотрение проекторы

$$P_k = \operatorname{diag}[\hat{P}_k, 0], \quad Q_k = \operatorname{diag}[\hat{Q}_k, 0], \quad k = 0,\ 1.$$

(Подробное описание этих проекторов см. в [23]. Из результатов [23] и в силу того, что ядро $\mathcal{W}^0 = \{0\}$, следует, что $I - P = (P_0 + P_1) \times O$, $\quad Q = (I - Q_0 - Q_1) \times I$, $\quad P : \mathcal{U} \to \mathcal{U}^1$, $\quad Q : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^1$. Применяя проектор $I - P$ к уравнению (4) в данной транскрипции, получаем

$$\begin{gathered} \Pi(\nu A(u_\sigma + u_\pi) - ((\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) - ((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) + \\ \sum_{l=1}^{k} \beta_l \nabla^2 w_l - u_p - g\gamma u_\theta + f(t)) = 0, \\ Bu_\pi = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Отсюда в силу теоремы 1 и свойств оператора B получаем необходимое условие квазистационарности полутраектории $u_\pi \equiv 0$. Другими словами, все решения нашей задачи (если они существуют) с необходимостью должны лежать в плоскости $\mathcal{B} = \{u \in \mathcal{U}_M : u_\pi = 0\}$. А так как $\Pi u_p = u_p$, то из первого уравнения (15) получаем соотношение (7) в нашей транскрипции

$$u_p = \Pi(\nu A u_\sigma - ((\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) \cdot \nabla) u_\sigma - (u_\sigma \cdot \nabla)(\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) + \sum_{l=1}^{k} \beta_l \nabla^2 w_l - g\gamma u_\theta + f(t)). \tag{16}$$

Очевидно, $P_0 \equiv P_R$, поэтому второе уравнение (15) есть соотношение (8) применительно к нашей ситуации. Итак, справедлива

Лемма 2. *В условиях леммы 1 любое решение задачи* (3), (4) *лежит во множестве*

$$\mathcal{A}^t = \{u \in \mathcal{U}_M : u_\pi = 0, \quad u_p = \Pi(\nu A u_\sigma - ((\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) \cdot \nabla) u_\sigma - (u_\sigma \cdot \nabla)(\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) +$$
$$\sum_{l=1}^{k} \beta_l \nabla^2 w_l - g\gamma u_\theta) + f_\pi(t)\}.$$

Замечание 12. Из (16) сразу следует условие (iii) теоремы 2 для любой точки $u_0^0 \in \mathcal{U}_M^{00} (\equiv \mathcal{U}_1^{00} \times \{0\})$. Поэтому ввиду замечания 8 множество $\mathcal{A}^t$ — простое банахово многообразие $\mathcal{C}^\infty$-диффеоморфное подпространству $\mathcal{U}_1^1 \times \mathcal{U}_2$ — является кандидатом на роль расширенного фазового пространства задачи (14), (2).

Приступим к проверке условий (9) и (13). Построим пространство $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}_1 \times \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Данное пространство, очевидно, будет интерполяционным пространством для пары $[\mathcal{U}, \mathcal{U}_M]_\alpha$, причем $\alpha = 1/2$. Как отмечено выше, полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ продолжается до группы $\{V_1^t : t \in \mathbb{R}\}$ на $\mathcal{U}_1^1$, где V_1^t — сужение оператора V^t на $\mathcal{U}_1^1$. Поскольку $\mathcal{U}_M^1 = \mathcal{U}_M \cap \mathcal{U}_1^1$ (по построению) и оператор B_1 непрерывен (теорема 4), то в силу равномерной ограниченности полугруппы $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ имеем

$$\int_0^\tau \|V_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1^1; \mathcal{U}_M^1)} dt \leq$$
$$\mathrm{const} \|B_1\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1; \mathcal{F}_1)} \int_0^\tau \|V_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1^1)} dt < \infty \qquad \forall \tau \in \mathbb{R}_+. \tag{17}$$

Далее, в силу неравенства Соболева [19, гл.9] полугруппа $\{W^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$ удовлетворяет оценке

$$\int_0^\tau \|W^t\|_{\mathcal{L}(\mathrm{dom}\, B_2; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))} dt < \infty. \tag{18}$$

Положим $\mathcal{U}_\alpha^1 = \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}^1$, где $\mathcal{U}^1 = \mathcal{U}_1^1 \times \mathcal{U}_2$. Тогда из (17) и (18) вытекает

Лемма 3. *В условиях леммы 1 выполняется соотношение* (9).

И наконец, выполняя требование (13), найдем оператор H и вектор-функцию h. Оператор H естественно представить в виде $H = H_1 \times H_2$, где $H_1 = A_{11}^{-1}(I - Q_0 - Q_1)F_1$, а $H_2 \equiv F_2$ (A_{11} — сужение оператора A_1 на $\mathcal{U}_1^1$). Включение $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M^1; \mathcal{U}_\alpha^1)$, показывается аналогично тому, как было показано включение $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$. Вектор-функцию $h(t)$ определим как $h = A_{11}^{-1}(I - Q_0 - Q_1)f$. Определение операторов Q_0 и Q_1 см. в [23]. В силу бесконечной гладкости f $h \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+;\ \mathcal{U}_\alpha^1)$.

Таким образом, все условия теоремы 2 выполнены. Поэтому справедлива

Теорема 8. *Пусть* $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$. *Тогда при любом* $u_0 \in \mathcal{A}^0$ *и некотором* $T \in \mathbb{R}_+$ *существует единственное решение* $u(t) \in \mathcal{C}^\infty(\,(0,T);\ \mathcal{U}_M\,)$ *задачи* (1), (2), *являющееся квазистационарной полутраекторией.*

Работа выполнена при поддержке АВЦП Развитие научного потенциала высшей школы (2009 – 2011 годы), проект № 2.1.1/2301.

Автор выражает искреннюю признательность профессору Г.А. Свиридюку за внимание и интерес к данным исследованиям.

Литература

1. Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и жидкостей Олдройта / А.П. Осколков // Труды мат. ин-та АН СССР. – 1988. – №179. – С. 126 – 164.

2. Осколков, А.П. Нелокальные проблемы для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л.Соболева / А.П. Осколков // Зап. науч. семин. ЛОМИ. – 1991.– Т. 198.– С. 31 – 48.

3. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, №4. – С. 47 – 74.

4. Осколков, А.П. О некоторых нестационарных линейных и квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей / А.П. Осколков // Зап. науч. семин. ЛОМИ АН СССР. – 1976.– Т. 59. – С. 133 – 177.

5. Осколков, А.П. К теории жидкостей Фойгта / А.П. Осколков // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1980. – Т. 96. – С. 233 – 236.

6. Свиридюк, Г.А. Разрешимость задачи термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Матем. – 1990. – №12. – С. 65 — 70.

7. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором / Г.А. Свиридюк // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6, №5. – С. 216 – 237.

8. Сукачева, Т.Г. Исследование математических моделей несжимаемых вязкоупругих жидкостей: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Т.Г. Сукачева; Новгород. гос. ун-т. – Великий Новгород, 2004. – 249 с.

9. Сукачева, Т.Г. Нестационарная линеаризованная модель движения несжимаемой вязкоупругой жидкости / Т.Г. Сукачева // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – №20 (158), вып. 11. – С. 77 – 83.

10. Сукачева, Т.Г. Нестационарная линеаризованная модель движения несжимаемой вязкоупругой жидкости высокого порядка / Т.Г. Сукачева // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та, серия «Математическое моделирование и программирование». – 2009. – № 17 (150), вып. 3. – С. 86 – 93.

11. Сукачева, Т.Г. Задача термоконвекции для линеаризованной модели движения несжимаемой вязкоупругой жидкости / Т.Г. Сукачева // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та, серия «Математическое моделирование и программирование». – 2010. – № 16 (192), вып. 5. – С. 83 — 93.

12. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.

13. Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк // Изв. РАН. Сер. Математика. – 1993. – Т. 57, №3. – С. 192 – 207.

14. Levine, H.A. Some nonexistance and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Du_t = -Au + F(u)$ / H.A. Levine // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1973. – V. 51, № 5. – P. 371 – 386.

15. Свиридюк, Г.А. Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Сиб. мат. журн. – 1990. – Т. 31, №5. – С. 109 – 119.

16. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства одного класса операторных уравнений / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, №2. – С. 250 – 258.
17. Свиридюк, Г.А. Некоторые математические задачи динамики вязкоупругих несжимаемых сред / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева //Вестник МаГУ. Математика. – 2005. – Вып. 8. – С. 5 – 33.
18. Борисович, Ю.Г. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере-Шаудера / Ю.Г. Борисович, В.Г. Звягин, Ю.И. Сапронов // Успехи матем. наук. – 1977. – Т. 32, №4. – С. 3 – 54.
19. Марсден, Дж. Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден , М. Мак-Кракен. – М.: Мир, 1980. – 368 с.
20. Бокарева, Т.А. Исследование фазовых пространств уравнений типа Соболева с относительно секториальными операторами: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Т.А. Бокарева. – Санкт-Петербург, 1993. – 107 с.
21. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – Изд. 2. – М.: Наука, 1970. – 288 с.
22. Свиридюк, Г.А. Об одной модели слабосжимаемой вязкоупругой жидкости / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 1. – С. 62 – 70.
23. Сукачева, Т.Г. Об одной модели движения несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта ненулевого порядка / Т.Г. Сукачева // Дифференц. уравн. – 1997. – Т. 33, №4. – С. 552 – 557.
24. Свиридюк Г.А. Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно ограниченным оператором / Г.А. Свиридюк // ДАН СССР. – 1991. – Т.318, № 4. – С. 828 – 831.
25. Свиридюк, Г.А. Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно секториальными операторами / Г.А. Свиридюк // Докл. РАН. – 1993. – Т. 329, №3. – С. 274 – 277.
26. Свиридюк, Г.А. Аналитические полугруппы с ядрами и линейные уравнения типа Соболева / Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров // Сиб. мат. журн. – 1995. – Т. 36, №5. – С. 1130 – 1145.
27. Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. — М.: Мир, 1985. – 376 с.

References

1. Oskolkov A.P. Initial-value problems for equations of motion Kelvin-Voight and Oldroyd fluids [Nachal'no-kraevye zadachi dlya uravneniy dvizheniya zhidkostey Kel'vina-Foygta i zhidkostey Oldroyta] *Trudy mat. in-ta AN SSSR*, 1988, no. 179, pp. 126 – 164.
2. Oskolkov A.P. Nonlocal problems for a class of nonlinear operator equations arising in the theory of Sobolev type equations [Nelokal'nye problemy dlya odnogo klassa nelineynykh operatornykh uravneniy, voznikayushchikh v teorii uravneniy tipa S.L.Soboleva] *Zap. nauch. semin. LOMI*, 1991, vol. 198, pp. 31 – 48.
3. Sviridyuk G.A. On the general operator semigroups theory [K obshchey teorii polugrupp operatorov] *Uspekhi mat. nauk.*, 1994, vol. 49, no. 4, pp. 47 – 74.
4. Oskolkov A.P. Some nonstationary linear and quasilinear systems occurring in the study of movement viscous fluids [O nekotorykh nestatsionarnykh lineynykh i kvazilineynykh sistemakh, vstrechayushchikhsya pri izuchenii dvizheniya vyazkikh zhidkostey] *Zap. nauch. semin. LOMI AN SSSR*, 1976, vol. 59, pp. 133 – 177.

5. Oskolkov A.P. On the theory of Voigt liquids [K teorii zhidkostey Foygta] *Zap. nauchn. sem. LOMI*, 1980, vol. 96, pp. 233 – 236.
6. Sviridyuk G.A. Solubility of the thermal convection of viscoelastic incompressible fluid [Razreshimost' zadachi termokonvektsii vyazkouprugoy neszhimaemoy zhidkosti] *Izv. vuzov. Matem.*, 1990, no. 12, pp. 65 — 70.
7. Sviridyuk G.A. Phase spaces of semilinear Sobolev type equations with relatively strong sectorial operator [Fazovye prostranstva polulineynykh uravneniy tipa Soboleva s otnositel'no sil'no sektorial'nym operatorom] *Algebra i analiz.*, 1994, vol. 6, no. 5, pp. 216 – 237.
8. Sukacheva T.G. The study of mathematical models of incompressible viscoelastic fluids: dis. ... Dr. Sci. Science [Issledovanie matematicheskikh modeley neszhimaemykh vyazkouprugikh zhidkostey: dis. ... d-ra fiz.-mat. nauk]. Velikiy Novgorod, 2004. 249 p.
9. Sukacheva T.G. Unsteady linearized model of the motion of an incompressible viscoelastic fluid [Nestatsionarnaya linearizovannaya model' dvizheniya neszhimaemoy vyazkouprugoy zhidkosti] *Vestn. Chelyab. gos. un-ta. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, Vyp. 11, 2009, no. 20 (158), pp. 77 – 83.
10. Sukacheva T.G. Unsteady linearized model of the motion of an incompressible viscoelastic fluid of the high order [Nestatsionarnaya linearizovannaya model' dvizheniya neszhimaemoy vyazkouprugoy zhidkosti vysokogo poryadka] *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya ≪Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie≫*, 2009, no. 17 (150), vyp. 3, pp. 86 – 93.
11. Sukacheva T.G. The problem of thermal convection for a linearized model of the motion of an incompressible viscoelastic fluid [Zadacha termokonvektsii dlya linearizovannoy modeli dvizheniya neszhimaemoy vyazkouprugoy zhidkosti] *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya ≪Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie≫*, 2010, no. 16 (192), vyp. 5, pp. 83 — 93.
12. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators, Utrecht-Boston: VSP, 2003. 179 p.
13. Sviridyuk G.A. Quasi-stationary trajectories of semilinear dynamical Sobolev type equations [Kvazistatsionarnye traektorii polulineynykh dinamicheskikh uravneniy tipa Soboleva] *Izv. RAN. Ser. Matematika*, 1993, vol. 57, no. 3, pp. 192 – 207.
14. Levine H.A. Some nonexistance and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Du_t = -Au + F(u)$ [Some nonexistance and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Du_t = -Au + F(u)$] *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1973, vol. 51, no. 5, pp. 371 – 386.
15. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. Cauchy problem for a class of semilinear Sobolev type equations [Zadacha Koshi dlya odnogo klassa polulineynykh uravneniy tipa Soboleva] *Sib. mat. zhurn.*, 1990, vol. 31, no. 5, pp. 109 – 119.
16. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. Phase spaces of class of operator equations [Fazovye prostranstva odnogo klassa operatornykh uravneniy] *Differents. uravneniya*, 1990, vol. 26, no. 2, pp. 250 – 258.
17. Sviridyuk G.A., SukachevaT.G. Some mathematical problems of the dynamics of viscoelastic incompressible media [Nekotorye matematicheskie zadachi dinamiki vyazkouprugikh neszhimaemykh sred], *Vestnik MaGU. Matematika*, 2005, Vyp. 8, pp. 5 – 33.
18. Borisovich Yu.G., Zvyagin V.G., Sapronov Yu.I. Nonlinear Fredholm maps and Leray-Schauder theory [Nelineynye fredgol'movy otobrazheniya i teoriya Lere-Shaudera] *Uspekhi matem. nauk.*, 1977, vol. 32, no. 4, pp. 3 – 54.

19. Marsden Dzh., Mak-Kraken M. Hopf bifurcation and its applications [Bifurkatsiya rozhdeniya tsikla i ee prilozheniya], Moscow: Mir, 1980. 368 p.
20. Bokareva T.A. Investigation of phase space of Sobolev type equations with relatively sectorial operators: Dis. ... cand. Sci. Science [Issledovanie fazovykh prostranstv uravneniy tipa Soboleva s otnositel'no sektorial'nymi operatorami: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk], Sankt-Peterburg, 1993. 107 p.
21. Ladyzhenskaya O.A. The mathematical theory of dinamic of viscous incompressible fluid [Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti, izd. 2.], Moscow: Nauka, 1970. 288 p.
22. Sviridyuk G.A. A model of weakly viscoelastic fluid [Ob odnoy modeli slaboszhimaemoy vyazkouprugoy zhidkosti] *Izv. vuzov. Matematika*, 1994, no. 1, pp. 62 – 70.
23. Sukacheva T.G. A model of motion of an incompressible viscoelastic Kelvin-Voigt fluid of nonzero order [Ob odnoy modeli dvizheniya neszhimaemoy vyazkouprugoy zhidkosti Kel'vina-Foygta nenulevogo poryadka] *Differents. uravn.*, 1997, vol. 33, no. 4, pp. 552 – 557.
24. Sviridyuk G.A. Semilinear Sobolev type equation with relatively bounded operator [Polulineynye uravneniya tipa Soboleva s otnositel'no ogranichennym operatorom] *DAN SSSR*, 1991, vol. 318, no. 4, pp. 828 – 831.
25. Sviridyuk G.A. Semilinear Sobolev type equation with relatively sectorial operators [Polulineynye uravneniya tipa Soboleva s otnositel'no sektorial'nymi operatorami] *Dokl. RAN*, 1993, vol. 329, no. 3, pp. 274 – 277.
26. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Analytic semigroup with kernels and linear Sobolev type equations [Analiticheskie polugruppy s yadrami i lineynye uravneniya tipa Soboleva] *Sib. mat. zhurn.*, 1995, vol. 36, no. 5, pp. 1130 – 1145.
27. Khenri D. Geometric theory of semilinear parabolic equations [Geometricheskaya teoriya polulineynykh parabolicheskikh uravneniy], Moscow.: Mir, 1985. 376 p.

Тамара Геннадьевна Сукачева, доктор физико-математических наук, доцент, кафедра алгебры и геометрии, Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого (Россия, Великий Новгород), tamara.sukacheva@novsu.ru.

Tamara G. Sukacheva, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Algebra and Geometry, Novgorod State University (Russia, Velikiy Novgorod), tamara.sukacheva@novsu.ru.

Поступила в редакцию 16 июня 2011 г.