УДК 517.977, 51-77 **DOI: 10.14529/mmp140402**

МОДЕЛЬ СТИМУЛИРУЮЩЕЙ ЗАРАБОТНОЙ ПЛАТЫ КАК ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Е.А. Александрова, С.А. Аникин

Рассматривается модель «отлынивания от труда» («shirking» model), в которой определяется профиль индивидуальной заработной платы работника в зависимости от стажа, являющийся стимулирующим условием для увеличения производительности труда работника и продолжительности занятости. В модель стимулирующей заработной платы добавлены предположения, позволяющие привести модель к неклассической задаче вариационного исчисления или линейной задаче оптимального управления. Доказаны критерий непустоты допустимого множества и теорема о существовании решения вариационной задачи. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности. Приведен алгоритм решения задачи. Представлены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: стимулирующие контракты; стимулирующая заработная плата; модель «отлынивания от труда»; неклассическая задача вариационного исчисления; линейная задача оптимального управления.

Введение

Экономическая теория стимулирующей (эффективной) заработной платы (efficiency wage models) объясняет взаимосвязь между величиной заработной платы и производительностью труда работника, а также влияние изменения заработной платы на усердие и интенсивность труда работников. Объяснить, почему выгодно выплачивать неравновесную заработную плату различным категориям работников на внутреннем рынке труда, можно с помощью ряда моделей: модели текучести, модели неблагоприятного отбора и модели «отлынивания от труда». Отдельным вопросам построения методологии исследований контрактных отношений между работником и работодателем в экономической организации посвящены работы как зарубежных [1–4], так и российских ученых [5–8].

В статье рассматривается модель «отлынивания от труда» в ситуации постконтрактного оппортунизма со стороны работника, которая возникает в условиях несовпадения интересов между работником и работодателем, а также вследствие отсутствия возможности контроля за соблюдением условий контракта со стороны работодателя. Задача нахождения эффективной заработной платы сводится к неклассической вариационной задаче [9]. Неклассический характер задачи возникает в связи с включением в модель ограничения на рост заработной платы.

Впервые проведено доказательство существования и единственности решения задачи «отлынивания от труда», которая оправдывает анализ сравнительной статики. Численные симуляции показывают, что свойства, установленные ранее в предположении существования решения [4], являются оправданными и позволяют установить единственно возможный профиль стимулирующей заработной платы.

1. Постановка задачи

В основе модели построения стимулирующего трудового контракта между работником и работодателем лежит обоснование выбора эмпирического профиля заработной платы, который определяет зависимость уровня вознаграждения работника от опыта (стажа) работы: иными словами, в начале трудовой деятельности работник получает заработную плату ниже стоимости произведенного им предельного продукта, а с увеличением стажа работы у одного работодателя заработная плата растет. Следует отметить, что растущий положительный профиль заработной платы может считаться стимулирующим фактором для увеличения производительности труда и продолжительности занятости работников на предприятии [4].

Кроме того, другим основным положением модели является установление продолжительности занятости работника на предприятии в предположении, что максимальная длительность трудовых отношений ограничена институциональными условиями — пенсионным возрастом работника (в соответствии с отраслевыми нормативами или трудовым кодексом) или особенностями трудового соглашения между работником и работодателем.

Установив длительность трудового контракта работника, возникает проблема выбора наклона профиля стимулирующей заработной платы. Из того, что работники стали агентами фирмы, еще не следует, что во все время трудовых отношений интересы работника и работодателя совпадают. Возможна такая ситуация, когда работник, уклоняясь от выполнения своих обязанностей и снижая при этом производительность своего труда, не наблюдает уменьшения размера заработной платы, выплачиваемой ему работодателем. Тогда работодатель несет издержки контроля за выполнением работы и не предпринимает попыток до определенного момента действий по предотвращению отлынивания работника до тех пор, пока издержки найма и увольнения превышают издержки соответствующего контроля. В данной работе для простоты предполагается, что работник, уклоняющийся от своих обязанностей, увольняется работодателем в момент отлынивания.

Перейдем к конкретному построению описанной модели и введем следующие обозначения:

T — эффективный момент прекращения трудовых отношений с работником (длительность трудового контракта работника);

$w\,(t)$ — заработная плата работника в момент времени t;

$\widetilde{w}\,(t)$ — резервная заработная плата (минимальная зарплата, при которой человек принимает положительное решение об участии в организованной трудовой деятельности) в момент времени t [1];

$\theta\,(t, w(t))$ — функция полезности, которую работник получает от отлынивания, начинающегося в момент времени t (ценность свободного времени, зависящая, вообще говоря, от профиля $w\,(\cdot)$);

$v\,(t)$ — предельный продукт, произведенный работником в момент времени t;

$c\,(t)$ — издержки, которые несет компания в связи с досрочным (в момент времени t) прекращением трудовых отношений с работником.

α — момент времени, в который работник может быть уволен, в т.ч. по причине отлынивания (случайная величина, зависящая от профиля $w\,(\cdot)$);

$f\,(t, w(t))$ — плотность распределения α.

Предполагается, что все введенные выше функции непрерывны на отрезке $[0, T]$. Кроме того, функцию $w\,(\cdot)$ будем считать элементом соболевского пространства H^1, где H^1 — пополнение по норме

$$\|w(\cdot)\| = \left(\int_0^T \left[w^2(t) + \dot{w}^2(t)\right] dt\right)^{1/2}$$

пространства непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, T]$ функций [10]. Известно, что всякая функция $w(\cdot) \in H^1$ абсолютно непрерывна на $[0, T]$ и ее производная $\dot{w}(\cdot)$, понимаемая как производная в смысле Соболева, есть элемент L_2 [10]. Здесь и далее L_2 — пространство функций, интегрируемых по Лебегу с квадратом на отрезке $[0, T]$. Пространству H^1, в частности, принадлежат кусочно-гладкие на $[0, T]$ функции (непрерывные функции, производная которых кусочно-непрерывна).

Стимулирующий контракт между работником и работодателем, ориентированный на максимизацию полезности для обеих сторон в долгосрочной перспективе, можно построить с помощью игровой модели. В данной работе, на первом этапе, ограничимся решением следующей оптимизационной задачи.

Требуется найти профиль заработной платы работника $w(\cdot) \in H^1$, максимизирующий доход работника, дополненный средним значением (математическим ожиданием) полезности от досрочного прекращения трудовых отношений в момент α, за вычетом среднего значения недополученной, начиная с того же момента, суммы заработной платы:

$$\max_{w(\cdot)\in H^1} \left\{ \int_0^T (w(t) - \widetilde{w}(t))\, e^{-rt} dt + \right.$$
$$\left. + E\left[\theta(\alpha, w(\alpha))\, e^{-r\alpha}\right] - E\left[e^{-r\alpha} \int_\alpha^T (w(t) - \widetilde{w}(t))\, e^{-r(t-\alpha)} dt\right] \right\},$$

где E — символ математического ожидания, $e^{-r(t-\tau)}$ — дисконтирующий множитель, позволяющий определить современную (на момент τ) стоимость будущей (на момент t) денежной суммы, r — процентная ставка.

Вычисляя математические ожидания

$$E\left[e^{-r\alpha} \int_\alpha^T (w(t) - \widetilde{w}(t))\, e^{-r(t-\alpha)} d\tau\right] = E\left[\int_\alpha^T (w(\tau) - \widetilde{w}(\tau))\, e^{-r\tau} d\tau\right] =$$
$$= \int_0^T f(t, w(t)) \int_t^T (w(\tau) - \widetilde{w}(\tau))\, e^{-r\tau} d\tau dt,$$
$$E\left[\theta(\alpha, w(\alpha))\, e^{-r\alpha}\right] = \int_0^T f(t, w(t))\ \theta(t, w(t))\ e^{-rt} dt,$$

получим задачу

$$\max_{w(\cdot)\in H^1} \left\{ \int_0^T \left[(w(t) - \widetilde{w}(t))\, e^{-rt} - f(t, w(t)) \int_t^T (w(\tau) - \widetilde{w}(\tau))\, e^{-r\tau} d\tau\right] dt + \right.$$
$$\left. + \int_0^T f(t, w(t))\ \theta(t, w(t))\ e^{-rt} dt \right\}. \tag{1}$$

Ограничения на заработную плату возникают из следующих соображений.

Во-первых, работодатель за период $[0, T]$ выплачивает суммарно заработную плату, равную стоимости предельного продукта, произведенного работником за тот же период, за вычетом издержек, которые несет работодатель в связи с увольнением работника в момент времени α:

$$\int_0^T w(t)\, e^{-rt} dt - E\left[\int_\alpha^T w(\tau)\, e^{-r\tau} d\tau\right] = \int_0^T v(t)\, e^{-rt} dt - E\left[\int_\alpha^T v(\tau)\, e^{-r\tau} d\tau\right] - E\left[c(\alpha)\, e^{-r\alpha}\right].$$

В результате, вычисляя входящие в последнее равенство математические ожидания, имеем

$$\begin{gathered}\int\limits_0^T \left[w\left(t\right)e^{-rt} - f\left(t, w(t)\right)\int\limits_t^T w\left(\tau\right)e^{-r\tau}d\tau \right] dt = \\ = \int\limits_0^T \left[v\left(t\right)e^{-rt} - f\left(t, w(t)\right)\int\limits_t^T v\left(\tau\right)e^{-r\tau}d\tau - f\left(t, w(t)\right)c\left(t\right)e^{-rt} \right] dt.\end{gathered} \tag{2}$$

Во-вторых, будем предполагать, что момент T прекращения взаимоотношений между работником и работодателем задан эффективно так, чтобы резервная заработная плата была равна стоимости предельного продукта [2] за вычетом возможных издержек:

$$\widetilde{w}\left(T\right) = v\left(T\right) - f\left(T, w(T)\right)c\left(T\right). \tag{3}$$

Если воспринимать резервную заработную плату как трансакционные издержки, связанные с увольнением имеющегося работника и поиском/наймом нового, то работодатель в момент наступления времени T безразличен к тому, чтобы нанимать нового или же сохранять прежнего работника, но в дальнейшем ему предпочтительнее разрыв имеющихся отношений с данным работником [7].

В-третьих, накладываются естественные ограничения на плотность распределения α и функцию $w(t)$:

$$\int\limits_0^T f\left(t, w(t)\right)dt = 1, \tag{4}$$

$$f\left(t, w(t)\right) \geqslant 0 \quad \forall t \in [0, T], \tag{5}$$

$$w(t) \geqslant 0 \quad \forall t \in [0, T]. \tag{6}$$

Упрощая с помощью (2) целевую функцию задачи (1), получаем задачу

$$\begin{gathered}\max_{w(\cdot)\in H^1}\left\{ \int\limits_0^T f\left(t, w(t)\right)\int\limits_t^T \left(\widetilde{w}\left(\tau\right) - v\left(\tau\right)\right)e^{-r\tau}d\tau dt + \right. \\ \left. + \int\limits_0^T \left(f\left(t, w(t)\right)\left(\theta\left(t, w(t)\right) - c\left(t\right)\right) + v\left(t\right) - \widetilde{w}\left(t\right)\right)e^{-rt}dt \right\}.\end{gathered} \tag{7}$$

В результате имеем оптимизационную задачу (7) с ограничениями (3) – (6). Различные постановки оптимизационных задач в соболевских пространствах можно найти в работах [11, 12].

2. Метод решения

Для решения задачи (3) – (7) потребуется ввести ряд уточняющих предположений.

Полезность от отлынивания для работника может зависеть от размера заработной платы в предположении, что с ростом заработной платы растет мотивация к увеличению производительности труда и снижению вероятности отлынивания. Однако отлынивание, как психологическая категория, может являться и внутренне присущей характеристикой индивида. Поэтому разумным является следующее

Предположение 1. *Функция полезности $\theta\left(t, w(t)\right) = \theta\left(t\right)$ не зависит от заработной платы $w(t)$.*

С ростом заработной платы вероятность прекращения трудовых отношений снижается, что обусловлено преодолением информационной асимметрии между работником и работодателем, адаптацией работника к условиям труда, а также осознанием и принятием того факта, что суммарная величина заработной платы еще не покрыла предельный продукт, произведенный работником. В данной работе рассматривается простейший случай зависимости плотности $f(t, w(t))$ от $w(t)$.

Предположение 2. *Плотность случайной величины α имеет вид*

$$f(t, w(t)) = a_1 - b_1 w(t), \tag{8}$$

где a_1 и b_1 — известные положительные константы.

И, наконец, довольно естественным является

Предположение 3. *Заработная плата $w(t)$ является неубывающей функцией с ограниченным ростом, т. е. для почти всех $t \in [0, T]$*

$$0 \leqslant \dot{w}(t) \leqslant \beta,$$

где β – положительная константа.

С учетом этих предположений приведем целевую функцию и ограничения задачи (3) – (7) к более простому виду.

Подставляя (8) в ограничения (3) и (4), имеем $v(T) - (a_1 - b_1 w(T))\, c(T) = \widetilde{w}(T)$,

$$\int\limits_0^T (a_1 - b_1 w(t))\, dt = 1.$$

Следовательно, $w(T) = \gamma$, где $\gamma = a_1/b_1 + (\widetilde{w}(T) - v(T))/(b_1 c(T))$, и

$$\int\limits_0^T w(t)\, dt = b,$$

где $b = (Ta_1 - 1)/b_1$. Кроме того, поскольку функция $w(t)$ является неубывающей и $\widetilde{w}(T) - v(T) \leqslant 0$, то для всех $t \in [0, T]$ имеем $w(t) \leqslant w(T) = \gamma \leqslant a_1/b_1$, что с учетом (8) обеспечивает выполнение условия (5). И, наконец, вследствие того, что $w(t) \geqslant w(0)$ для всех $t \in [0, T]$, условие (6) равносильно $w(0) \geqslant 0$.

Далее, с учетом (8) задача (7) приобретает вид

$$\max_{w(\cdot) \in H^1} \left\{ \int\limits_0^T (a_1 - b_1 w(t)) \left[\int\limits_t^T (\widetilde{w}(\tau) - v(\tau))\, e^{-r\tau} d\tau + (\theta(t) - c(t))\, e^{-rt} \right] dt + \right.$$
$$\left. + \int\limits_0^T (v(t) - \widetilde{w}(t))\, e^{-rt} dt \right\}.$$

В итоге получаем задачу

$$\min_{w(\cdot) \in H^1} \left\{ \int\limits_0^T w(t)\, a(t)\, dt + A_0 \right\} \tag{9}$$

с ограничениями

$$w(0) \geqslant 0, \tag{10}$$

$$0 \leqslant \dot{w}(t) \leqslant \beta \quad \text{для п.в.}\, t \in [0, T]\,, \tag{11}$$

$$\int\limits_0^T w\,(t)\,dt = b, \tag{12}$$

$$w\,(T) = \gamma, \tag{13}$$

где

$$a\,(t) = b_1 \left[\int\limits_t^T \left(\widetilde{w}\,(\tau) - v\,(\tau)\right) e^{-r\tau} d\tau + \left(\theta\,(t) - c\,(t)\right) e^{-rt}\right], \tag{14}$$

$$A_0 = \int\limits_0^T \left(a_1 \left[\int\limits_t^T \left(\widetilde{w}\,(\tau) - v\,(\tau)\right) e^{-r\tau} d\tau + \left(\theta\,(t) - c\,(t)\right) e^{-rt}\right] + \left(v\,(t) - \widetilde{w}\,(t)\right) e^{-rt} \right) dt.$$

Такие задачи относятся к классу неклассических задач вариационного исчисления. Неклассический характер задачи возникает в связи с ограничением (11). Если ввести обозначения

$$x_1(t) = \int\limits_0^t w\,(\tau)\,d\tau, \quad x_2(t) = w(t)$$

и в (9) отбросить константу A_0, то задача (9)–(13) сводится к линейной задаче оптимального управления со свободным левым концом, закрепленными временем и правым концом:

$$\begin{aligned}
&\min_{u(\cdot)\in L_2} \int\limits_0^T x_2\,(t)\,a\,(t)\,dt,\\
&\dot{x}_1 = x_2,\\
&\dot{x}_2 = u(t),\\
&x_1(0) = 0, \quad x_2(0) \geqslant 0,\\
&x_1(T) = b, \quad x_2(T) = \gamma,\\
&0 \leqslant u\,(t) \leqslant \beta \text{ для п.в. } t \in [0, T]\,.
\end{aligned}$$

Для решения этой задачи можно было воспользоваться принципом максимума Понтрягина. Авторам все же показалось удобнее свести задачу (9) – (13) к линейной оптимизационной задаче, для которой с помощью теоремы Куна–Таккера можно получить не только необходимые, но и достаточные условия оптимальности.

Далее всегда предполагаем, что $T > 0$, $\beta > 0$, $b > 0$, $\gamma > 0$. Выполним преобразования, позволяющие с учетом

$$\dot{w}(t) = u(t) \tag{15}$$

исключить из задачи (9) – (13) функцию $w\,(t)$. Интегрирование по частям приводит целевую функцию задачи к виду

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^T w\,(t)\,a\,(t)\,dt = w\,(T) \int\limits_0^T a\,(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^T w'\,(t) \int\limits_0^t a\,(\tau)\,d\tau\,dt =\\
&= \gamma \int\limits_0^T a\,(t)\,dt - \int\limits_0^T g\,(t)\,u\,(t)\,dt,
\end{aligned}$$

где

$$g(t) = \int\limits_0^t a(\tau)\, d\tau.$$

Из соотношений (13) и (15) имеем

$$w(t) = \gamma - \int\limits_t^T u(\tau)\, d\tau. \tag{16}$$

Поэтому условие (10) приводится к виду

$$w(0) = \gamma - \int\limits_0^T u(t)\, dt \geqslant 0,$$

а условие (12) — к виду

$$\begin{aligned} b &= \int\limits_0^T w(t)\, dt = \int\limits_0^T \left(\gamma - \int\limits_t^T u(\tau)\, d\tau\right) dt = \gamma T - \int\limits_0^T \int\limits_t^T u(\tau)\, d\tau dt = \\ &= \gamma T - \int\limits_0^T \int\limits_0^\tau u(\tau)\, dt d\tau = \gamma T - \int\limits_0^T \tau\, u(\tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

В результате задача (9) – (13) оказывается равносильной линейной оптимизационной задаче с линейными ограничениями

$$\max_{u(\cdot)\in L_2} \int\limits_0^T g(t)\, u(t)\, dt, \tag{17}$$

$$\int\limits_0^T u(t)\, dt \leqslant \gamma, \tag{18}$$

$$0 \leqslant u(t) \leqslant \beta \text{ для п.в. } t \in [0, T], \tag{19}$$

$$\int\limits_0^T t\, u(t)\, dt = \gamma T - b. \tag{20}$$

Теорема 1. *Если допустимое множество задачи* (17) — (20) *не пусто, то ее решение существует.*

Доказательство. Допустимое множество задачи выпукло, замкнуто, ограничено, а целевая функция выпукла и непрерывна в гильбертовом пространстве L_2. Следовательно, по теореме Вейерштрасса [13] решение задачи (17) – (20) существует. □

Предложение 1. *Допустимое множество задачи* (17) – (20) *не пусто тогда и только тогда, когда*

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant \gamma T - b \leqslant 0,5\beta T^2, \\ \left[\begin{array}{l} \gamma \geqslant \beta T, \\ \gamma^2 \leqslant 2\beta b. \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{21}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть допустимое множество задачи (17) – (20) не пусто. Тогда

$$\gamma T - b = \int\limits_0^T t\,u\,(t)\,dt \leqslant \int\limits_0^T t\beta dt = 0,5\beta T^2, \tag{22}$$

$$\gamma T - b = \int\limits_0^T t\,u\,(t)\,dt \geqslant 0. \tag{23}$$

Далее, если $\gamma \geqslant \beta T$, то необходимость доказана. Пусть $\gamma < \beta T$. Тогда в силу (16), (18), (19) для всех $t \in [0;T]$ имеют место неравенства

$$w\,(t) = \gamma - \int\limits_t^T u\,(\tau)\,d\tau \geqslant \gamma - \int\limits_0^T u\,(\tau)\,d\tau \geqslant 0,$$

$$w\,(t) = \gamma - \int\limits_t^T u\,(\tau)\,d\tau \geqslant \gamma - \int\limits_t^T \beta d\tau = \gamma - \beta\,(T-t)\,.$$

Следовательно, для любого $t \in [0,T]$

$$w\,(t) \geqslant \max\left\{0, \gamma - \beta\,(T-t)\right\} = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < T - \gamma/\beta, \\ \gamma - \beta\,(T-t)\,, & T - \gamma/\beta \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{24}$$

Поэтому

$$b = \int\limits_0^T w\,(t)\,dt \geqslant \int\limits_0^T \max\left\{0, \gamma - \beta\,(T-t)\right\} dt = \int\limits_{T-\gamma/\beta}^T \left[\gamma - \beta\,(T-t)\right] dt = 0,5\gamma^2/\beta. \tag{25}$$

Окончательно получим $\gamma^2 \leqslant 2\beta b$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполняется (21). Докажем, что в случае $\gamma \geqslant \beta\,T$, функция $u\,(t) \equiv 2\,(\gamma T - b)/T^2$ удовлетворяет ограничениям (18) – (20). Действительно, во-первых, $\forall t \in [0,T]$ выполняется $0 \leqslant u\,(t) \leqslant 2 \cdot 0,5\beta T^2/T^2 = \beta$ и, во-вторых,

$$\int\limits_0^T t\,u\,(t)\,dt = \frac{2\,(\gamma\,T - b)}{T^2}\int\limits_0^T t\,dt = \gamma\,T - b; \quad \int\limits_0^T u\,(t)\,dt \leqslant \beta\,T \leqslant \gamma.$$

Пусть теперь $\gamma < \beta\,T$. Тогда с учетом (21) $0 < T - \gamma/\beta < T$ и $b \geqslant 0,5\gamma^2/\beta$. Покажем, что функция

$$u\,(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < T - \gamma/\beta, \\ p, & T - \gamma/\beta \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

где $p = 2\beta^2\,(\gamma T - b)/\left(2\gamma T\beta - \gamma^2\right)$, удовлетворяет (18) – (20). Действительно, поскольку

$$0 \leqslant p \leqslant 2\beta^2\left(\gamma T - \gamma^2/(2\beta)\right)/\left(2\gamma T\beta - \gamma^2\right) = \beta,$$

то $0 \leqslant u\,(t) \leqslant \beta$. Кроме того,

$$\int\limits_0^T u\,(t)\,dt = \int\limits_{T-\gamma/\beta}^T p dt = p\gamma/\beta \leqslant \gamma;$$

$$\int\limits_0^T t\,u\,(t)\,dt = p\int\limits_{T-\gamma/\beta}^T t dt = 0,5p\left(T^2 - (T-\gamma/\beta)^2\right) = \tfrac{p}{2\beta^2}\left[2\gamma T\beta - \gamma^2\right] = \gamma T - b.$$

□

Замечание 1. Если при выполнении условия (21) имеет место равенство $\gamma T - b = 0$, то допустимое множество задачи (17) – (20), состоит из единственной функции $u(t) \equiv 0$.

Действительно, из соотношений (19), (23) при условии $\gamma T - b = 0$ имеем $u(t) \equiv 0$.

Замечание 2. Если при выполнении условия (21) имеет место равенство $\gamma T - b = 0,5\beta T^2$, то допустимое множество задачи (17) – (20) состоит из единственной функции $u(t) \equiv \beta$.

Действительно, из соотношений (19), (22) при условии $\gamma T - b = 0,5\beta T^2$ имеем $u(t) \equiv \beta$.

Замечание 3. Если при выполнении условия (21) имеет место равенство $\gamma^2 = 2\beta b$, то допустимое множество задачи (17) – (20) состоит из единственной функции

$$u(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < T - \gamma/\beta, \\ \beta, & T - \gamma/\beta \leqslant t \leqslant T, \end{cases} . \tag{26}$$

Действительно, из соотношений (24), (25) при условии $\gamma^2 = 2\beta b$ имеем $w(t) = \max\{0, \gamma - \beta(T-t)\}$, дифференцирование которой для п.в. $t \in [0,T]$ дает (26).

Случаи, рассмотренные в замечаниях 1 – 3, являются вырожденными и не представляют исследовательского интереса. Перейдем к рассмотрению условий оптимальности.

Теорема 2. *Пусть*

$$\begin{cases} 0 < \gamma T - b < 0,5\beta T^2, \\ \left[\begin{array}{l} \gamma \geqslant \beta T, \\ \gamma^2 < 2\beta b. \end{array} \right. \end{cases} \tag{27}$$

Тогда для того чтобы функция $u_*(\cdot) \in L_2$ была решением задачи (17) – (20), *необходимо и достаточно, чтобы существовали не равные одновременно нулю множители Лагранжа $\lambda_1 \geqslant 0$ и λ_2 такие, что*

$$L(u_*(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = \min\{L(u(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) : \ u(\cdot) \in L_2, \ 0 \leqslant u(t) \leqslant \beta \text{ для п.в. } t \in [0,T]\}, \tag{28}$$

$$\lambda_1 \left(\int_0^T u_*(t)\, dt - \gamma \right) = 0, \tag{29}$$

где

$$L(u(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = -\int_0^T g(t)\, u(t)\, dt + \lambda_1 \left(\int_0^T u(t)\, dt - \gamma \right) + \lambda_2 \left(\int_0^T t u(t)\, dt - \gamma T + b \right) =$$

$$= \int_0^T (\lambda_1 + \lambda_2 t - g(t))\, u(t)\, dt - \lambda_1 \gamma + \lambda_2 (b - \gamma T).$$

Доказательство теоремы сразу следует из теоремы Куна–Таккера [9, Теорема 5, стр. 83] с учетом лемм 1 и 2, доказанных ниже.

Лемма 1. *Если выполнено* (27), *то образ множества*

$$D = \{u(\cdot) \in L_2 : 0 \leqslant u(t) \leqslant \beta \text{ для п.в. } t \in [0,T]\}$$

содержит окрестность нуля при отображении

$$u(\cdot) \to F(u) = \int_0^T t u(t)\, dt - (\gamma T - b).$$

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = \min\left\{\gamma T - b,\, 0,5\beta T^2 - (\gamma T - b)\right\}$. В силу (27) $\varepsilon > 0$. Для произвольного $p \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ положим $u(t) \equiv 2(\gamma T - b + p)/T^2$. Тогда $u(\cdot) \in D$ ввиду

$$u(t) \equiv 2(\gamma T - b + p)/T^2 > 2(\gamma T - b - \varepsilon)/T^2 \geqslant 0,$$
$$u(t) \equiv 2(\gamma T - b + p)/T^2 < 2(\gamma T - b + \varepsilon)/T^2 \leqslant \beta.$$

Кроме того,

$$F(u) = \int\limits_0^T t\, u(t)\, dt - (\gamma T - b) = \frac{2(\gamma T - b + p)}{T^2} \cdot \frac{T^2}{2} - (\gamma T - b) = p.$$

$\square$

Лемма 2. *Если выполнено* (27), *то найдется функция* $u(\cdot) \in D$ *такая, что*

$$\int\limits_0^T t\, u(t)\, dt = \gamma T - b, \quad \int\limits_0^T u(t)\, dt < \gamma.$$

Доказательство леммы аналогично доказательству достаточности в предложении 1 с заменой соответствующих нестрогих неравенств на строгие.

3. Алгоритм решения

Согласно теореме 2 для решения задачи (17) – (20) требуется решить задачу

$$\min_{u(\cdot) \in L_2} \left\{ \int\limits_0^T (\lambda_1 + \lambda_2 t - g(t))\, u(t)\, dt : \quad 0 \leqslant u(t) \leqslant \beta \text{ для п.в. } t \in [0, T] \right\}. \tag{30}$$

Очевидно, что решение этой задачи имеет вид:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \lambda_1 + \lambda_2 t - g(t) > 0, \\ \beta, & \lambda_1 + \lambda_2 t - g(t) < 0, \\ \widetilde{u}(t), & \lambda_1 + \lambda_2 t - g(t) = 0, \end{cases} \tag{31}$$

где $\widetilde{u}(t)$ – произвольная измеримая функция такая, что $0 \leqslant \widetilde{u}(t) \leqslant \beta$ для п.в. $t \in [0, T]$. Множители Лагранжа λ_1, λ_2 и функция $\widetilde{u}(t)$ в (31) должны быть выбраны так, чтобы $u(\cdot) \in L_2[0, T]$ и

$$\lambda_1 \geqslant 0, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \neq 0, \tag{32}$$

$$\lambda_1 \left(\int\limits_0^T u(t)\, dt - \gamma \right) = 0, \tag{33}$$

$$\int\limits_0^T u(t)\, dt \leqslant \gamma, \tag{34}$$

$$\int\limits_0^T t\, u(t)\, dt = \gamma T - b. \tag{35}$$

Замечание 4. Если функция $a(t)$ ни на каком промежутке из $[0, T]$ не является постоянной, то функция, решающая задачу (17) – (20), имеет вид:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \lambda_1 + \lambda_2 t - g(t) \geqslant 0, \\ \beta, & \lambda_1 + \lambda_2 t - g(t) < 0, \end{cases} \tag{36}$$

где λ_1, λ_2 определяются из условий (32) – (35).

Действительно, в этом случае функция $g(t) = \int\limits_0^t a(\tau)\, d\tau$ не может быть линейной ни на каком промежутке из $[0, T]$. Следовательно, равенство $\lambda_1 + \lambda_2 t - g(t) = 0$ возможно только для значений t из множества меры ноль. Поэтому функция вида (31) эквивалентна функции (36).

4. Результаты численного моделирования

Численное решение задачи (9) – (13) выполнено в соответствии с алгоритмом, представленным в пункте 3, с учетом замечания 4 для следующих входных параметров и функций:

$$T = 20; \quad r = 0,12; \quad \beta = 10; \quad v(t) = -0,0025t^2 + 0,125t + 3,5;$$
$$f(t, w(t)) = 1 - 0,5w(t)/v(T) = 1 - 0,1w(t), \text{ т.е. } a_1 = 1,\ b_1 = 0,1;$$
$$\widetilde{w}(t) = -0,01t^2 + 0,4t + 1; \quad c(t) = 1 + 0,001\,(T - t)$$

и различных функций полезности от отлынивания $\theta(t)$. Вычисляем константы $\gamma = 10$ и $b = 19$ и убеждаемся, что условия (27) выполнены.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$\theta(t) = T \sin^2(2\pi t/T) + 0,5.$$

Результаты расчетов:

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 0,2797; \quad w(0) = 8,6768;$$

$$\dot{w}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 7,4913 \quad \text{или} \quad 7,62362 \le t \le 20; \\ \beta, & 7,4913 < t < 7,62362. \end{cases}$$

Откуда

$$w(t) = \begin{cases} 8,6768; & 0 \le t \le 7,4913; \\ 10\,t - 66,2362; & 7,4913 < t < 7,62362; \\ 10; & 7,62362 \le t \le 20. \end{cases}$$

График функции $w(t)$ (профиль заработной платы) представлен на рис. 1.

Пример 2. Во втором примере в качестве функции полезности от отлынивания рассмотрена функция вида

$$\theta(t) = 1,7 \cdot T \sin^4(20\pi t/T).$$

Результаты расчетов:

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 0,4011; \quad w(0) = 3,3973.$$

График функции $w(t)$ (профиль заработной платы) представлен на рис. 2.

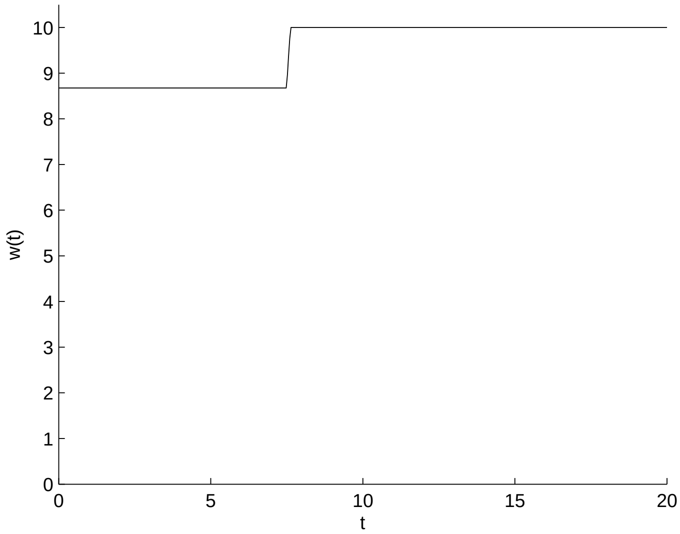

Рис. 1. График функции $w\,(t)$

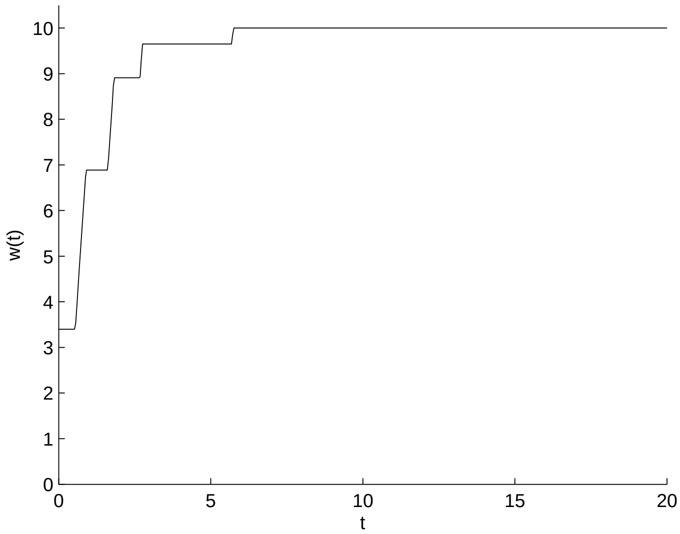

Рис. 2. График функции $w\,(t)$

Литература

1. Эренберг, Р.Дж. Современная экономика труда. Теория и государственная политика / Р.Дж. Эренберг, Р.С. Смит. – М.: Изд-во МГУ, 1996.
2. Милгром, П. Экономика, организация и менеджмент: В 2-х т. / П. Милгром. – СПб.: Экономическая школа, 1999.
3. Gibbons, R. Incentives between firms (and within) / R. Gibbons // Management Science. – 2005. – V. 51, № 1. – P. 2–17
4. Lazear, E. Agency, Earnings Profiles, Productivity, and Hours Restrictions / E. Lazear // The American Economic Review. September. – 1981. – P. 606–620.

5. Беляева, М.Г. Работник и работодатель. Теория и практика контрактных отношений / М.Г. Беляева. – Самара : Изд-во СНЦ РАН, 2008.
6. Смирных, Л.И. Продолжительность занятости и трудовая мобильность / Л.И. Смирных. – М.: ТЕИС, 2003.
7. Калабина Е.Г. Эволюция системы отношений «работник – работодатель» в экономической организации / Е.Г. Калабина. – Екатеринбург: Институт экономики УрО РАН, 2011.
8. Попов, Е. Оценка внутрифирменного оппортунизма работников и менеджеров / Е. Попов, В. Симонова // Проблемы теории и практики управления. – 2005. – № 4. – С. 108–117.
9. Иоффе, А.Д. Теория экстремальных задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. – М.: Наука, 1974.
10. Соболев, С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1988.
11. Лионс, Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972.
12. Свиридюк, Г.А. Задача оптимального управления для одного класса линейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, А.А. Ефремов // Известия высших учебных заведений. Серия: Математика. – 1996. – № 12(415). – С. 75–83.
13. Васильев, Ф.П. Методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1981.

Екатерина Александровна Александрова, Высшая школа менеджмента Санкт-Петербургского государственного университета; Лаборатория теории рынков и пространственной экономики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Санкт-Петербург, Российская Федерация), eaaleksandrova@yahoo.com.

Сергей Алексеевич Аникин, кандидат физико-математических наук, Отдел оптимального управления, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН; Кафедра моделирования управляемых систем, Уральский Федеральный университет имени Первого президента России Б.Н. Ельцина (г. Екатеринбург, Российская Федерация), asa@imm.uran.ru.

Поступила в редакцию 22 июня 2014 г.

**Bulletin of the South Ural State University.
Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software",
2014, vol. 7, no. 4, pp. 22–35.**

MSC 49N05, 49N90 **DOI: 10.14529/mmp140402**

A Model of Incentive Wages as an Optimal Control Problem

E.A. Aleksandrova, Graduate School of Management St. Petersburg University; National Research University Higher School of Economics, Saint Petersburg, Russian Federation, eaaleksandrova@yahoo.com

S.A. Anikin, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences; Ural Federal University Named after the First President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation, asa@imm.uran.ru

This articles considers a ≪shirking≫ model under the theory of efficiency contracts, which determines the profile of a worker's individual wages depending on his experience. The profile is a stimulating condition to increase productivity and the period of employment. Certain additional assumtions reduce the model to a nonclassical variational problem or a linear optimal control problem. We prove nonemptiness criteria and the existence of solutions, find necessary and sufficient conditions for optimality, give an algorithm to solve the problem, and present the results of simulations.

Keywords: ≪shirking≫ model; an efficiency contract model; an efficiency wage model; incentive wages; nonclassical variational problem; linear optimal control problem.

References

1. Ehrenberg R.J., Smith R.S. *Modern Labor Economics: Theory and Public Policy.* Pearson Education, Inc., 2009.
2. Milgrom P., Roberts J. *Economics, Organization and Management Englewood Cliffs.* N.J., Prentice-Hall, 1992.
3. Gibbons, R. Incentives Between Firms (and Within). *Management Science,* 2005, vol. 51, no. 1, pp. 2–17. DOI: 10.1287/mnsc.1040.0229
4. Lazear E. Agency, Earnings Profiles, Productivity, and Hours Restrictions. *The American Economic Review,* September, 1981, pp. 606–620.
5. Belyaeva M.G. *Rabotnik i rabotodatel'. Teoriya i praktika kontraktnykh otnosheniy* [The Employee and Employer. The Theory of Contractual Relations]. Samara, Izd-vo SNC RAN, 2008.
6. Smirnykh L.I. *Prodolzhitel'nost' zanyatosti i trudovaya mobil'nost'* [The Duration of Employment and Labor Mobility]. Moscow, TEIS, 2003.
7. Kalabina E.G. *Evolutsiya sistemy otnosheniy "rabotnik – rabotodatel" v economicheskoy organizatsii* [Evolution of Relations "the Employee – Employer" in the Economic Organization]. Yekaterinburg, Institut Economiki UrO RAN, 2011.
8. Popov E., Simonova V. [Evaluation of Intra-Firm Opportunism of Employees and Managers]. *Problemy teorii i praktiki upravleniya,* 2005, vol. 4, pp. 108–117. (in Russian)
9. Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. *Teoriya extremal'nykh zadach* [Theory of Extremal Problems]. Moscow, Nauka, 1974.
10. Sobolev S.L. *Nekotorye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematichesoy fizike* [Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1988.
11. Lions J.L. *Controle Optimal de Systemes Gouvernes par des Equations aux Derivecs Partielles.* Paris, Dunod Gauthier-Villars, 1968.
12. Sviridyuk G.A., Efremov A.A. An Optimal Control Problem for One Class of Linear Sobolev Type Equations. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika),* 1996, vol. 40, no. 12, pp. 60–71.
13. Vasil'ev F.P. *Metody resheniya extremal'nykh zadach* [Methods for Solving Extreme Problems]. Moscow, Nauka, 1981.

Received June 22, 2014