УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmp140305

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ

В.А. Костин, А.В. Костин, С. Бадран

В работе устанавливается равномерно корректная разрешимость задачи Коши для обобщенного телеграфного уравнения с переменными коэффициентами, частным случаем которого является классическое телеграфное уравнение. Установление корректной разрешимости математических задач является одним из основных условий при их численной реализации. Как известно, для классического телеграфного уравнения решение задачи Коши находится в классе дважды непрервно дифференцируемой функции и с помощью метода Римана выписывается в явном виде. Однако, при этом вопрос устойчивости решения в зависимости от начальных данных, требующий использования соответствующих метрических пространств в этих работах не обсуждается. Между тем этот вопрос является наиболее важным при корректной численной реализации решения задачи, когда его существование и единственность доказаны. В настоящей заметке методами теории полугрупп линейных преобразований, устанавливается равномерно корректная разрешимость задачи Коши в пространствах функций интегрируемых с экспоненциальным весом для некоторого класса дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Получено точное решение задачи Коши и указаны условия на коэффициенты, при которых задача раномерно корректна в некоторых функциональных пространствах. Следствием из этих результатов является равномерная корректность задачи Коши для классического телеграфного уравнения с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: телеграфное уравнение; корректная разрешимость; полугруппы; косинус–функция; задача Коши; дробные степени операторов.

Введение

Установление корректной разрешимости математических задач является одним из основных условий при их численной реализации. Начиная с работы С.Г. Крейна [8], метод теории полугрупп стал одним из важнейших при исследовании корректной разрешимости начально–краевых задач для эволюционных уравнений и его приложений к решению задач для уравнений с частными производными. Этой тематике посвящены работы математиков Воронежской и Челябинской школ. В этом числе важное место занимают работы Г.А. Свиридюка [10] и его учеников по уравнениям соболевского типа, относящихся к классу уравнений с особенностью.

В настоящей заметке метод теории полугрупп применяется к исследованию корректной разрешимости задач Коши для обобщенного телеграфного уравнения с коэффициентами, имеющими особенность.

Как известно (см. например [3, с. 90]) телеграфное уравнение записывается в виде

$$\frac{\partial^2\omega(t,x)}{\partial x^2} = a_0\frac{\partial^2\omega(t,x)}{\partial t^2} + 2b_0\frac{\partial\omega(t,x)}{\partial t} + c_0\omega(t,x), \tag{0.1}$$

где $t, x \geq 0$, a_0, b_0, c_0 — постоянные коэффициенты.

Для уравнения (1) ставится задача о нахождении решения, удовлетворяющего условиям Коши

$$\omega(0,x) = \varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial\omega(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x). \tag{0.2}$$

Решение ищется в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций и с помощью метода Римана выписывается в явном виде (см. [3, с. 92]).

При этом вопрос устойчивости решения в зависимости от начальных данных, требующий использования соответствующих метрических пространств в [3], не обсуждается. Между тем, этот вопрос является наиболее важным при корректной численной реализации решения задачи, когда его существование единственности доказано.

В настоящей заметке методами теории полугрупп линейных преобразований, разработанной в работах [1, 4–9], устанавливается равномерно корректная разрешимость задачи Коши в L_p-весовых пространствах для некоторого класса дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и для которых уравнение (1) является частным случаем.

1. Необходимые определения и факты

Здесь мы придерживаемся терминологии и фактов изложенных, в [1, 4–9].

Пусть E — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|$.

Определение 1. *Семейство $T = \{T(t), 0 \le t < \infty\}$ линейных и ограниченных операторов из E в E называется C_0-полугруппой (сильно непрерывной полугруппой), если*
1) $\sup\limits_{\|\varphi\| \le 1} \|T(t)\varphi\| < \infty$, $\varphi \in E$,
2) $T(0)\varphi = \varphi$,
3) $T(t+s)\varphi = T(t)T(s)\varphi$,
4) $\lim\limits_{t\to 0+} \|T(t)\varphi - \varphi\| = 0$, *для всех* $\varphi \in E$.

T — называется сжимающей полугруппой, если $\|T(t)\varphi\| \le \|\varphi\|$ для всех $t \ge 0$, $\varphi \in E$.

В соответствии с К. Иосидой [5] сжимающие (C_0)-полугруппы относятся к классу *равномерно непрерывных* полугрупп. Такие полугруппы используются в дальнейшем.

Определение 2. *Для (C_0)-полугруппы определяется производящий оператор (генератор) как предел*

$$Au = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}[T(t) - I]\varphi, \tag{1.1}$$

I — тождественный оператор. Таким образом, A — линейный оператор с областью определения $D(A) = \{\varphi \in E; \lim\limits_{t\to 0+} \frac{1}{t}[T(t) - I]\varphi\}$ существует в E. Оказывается $D(A)$ плотно в E.

Для $\varphi \in D(A)$ операторы A и $T(t)$ коммутируют, то есть $AT(t)\varphi = T(t)A\varphi$, при этом справедливо равенство

$$\frac{dT(t)}{dt}\varphi = AT(t). \tag{1.2}$$

Отсюда следует представление для производящего оператора

$$A\varphi = \frac{dT(t)}{dt}\varphi\bigg|_{t=0} = T'(0)\varphi. \tag{1.3}$$

Определение 3. *(C_0)-группой на E называется семейство операторов $T = \{T(t) : t \in \mathbb{R}$ удовлетворяющим условиям определение 1, в которых $\mathbb{R}^+ = [0,\infty)$ заменяется на $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$.*

Генератор A (C_0)-группы $T(t)$ на E определяется равенством (1.1), причем речь идет о двустороннем пределе при $t \to 0$.

Замечание 1. A — генератор (C_0)-группы тогда и только тогда, когда $\pm A$ порождает (C_0)-полугруппу $T_\pm(t)$. В этом случае

$$T(t) = \begin{cases} T_+(t), & t \geq 0; \\ T_-(t), & t < 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Определение 4. *Сильно непрерывной операторной косинус-функцией называется семейство операторов $C = \{C(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset B(E)$, удовлетворяющее условиям*
(i) $C(t+s) + C(t-s) = 2C(t)C(s)$
(ii) $C(0) = I$
(iii) $C(t)\varphi$ — непрерывная функция для каждого $\varphi \in E$.

Определение 5. *Генератором A операторной косинус-функции C называется оператор $A = C''(0)$. Его областью определения является множество тех $\varphi \in E$, для которых функция $C(t)$ дважды дифференцируема в точке $t = 0$. Операторные косинус-функции C и (C_0)-полугруппы T связаны между собой формулой [4, с. 178]*

$$T(t)\varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}} C(s)\varphi ds. \tag{1.5}$$

В дальнейшем нам понадобится следующее (см. [4, с. 179]).

Предложение 1. *Пусть B порождает (C_0)-группу $T(t)$. Тогда $A_a = B^2 + aI$, $(a > 0)$ порождает операторную косинус-функцию $C_a(t)$, и справедливо представление*

$$C_a(t)\varphi = C_0(t)\varphi(x) + at \int_0^t (t^2 - s^2)^{-\frac{1}{2}} I_1[a(t^2 - s^2)^{\frac{1}{2}}] C_0(s) ds, \tag{1.6}$$

где $C_0(t) = \frac{1}{2}[T(t) + T(-t)]$, $I_1(s)$ — модифицированная функция Бесселя порядка 1.

Следующие факты связывают понятия (C_0)-полугруппы и (C_0)-косинус-функций с корректной разрешимостью задачи Коши для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве первого и второго порядков.

$$u'(t) = Au(t), \tag{1.7}$$

$$u''(t) = Au(t). \tag{1.8}$$

Определение 6. *Решением уравнения (1.1) на отрезке $[0, t_0]$ называется [1, с. 38] функция $u(t)$, удовлетворяющая условиям: 1) $u(t) \in D(A)$ при всех $t \in [0, t_0]$, 2) в каждой точке $t \in [0, t_0]$ существует сильная производная $u'(t)$, 3) уравнение (1.5) удовлетворяется при всех $t \in [0, t_0]$.*

Под задачей Коши на $[0, t_0]$ понимают задачу о нахождении решения уравнения (1.5), удовлетворяющее условию

$$u(0) = u_0 \in D(A). \tag{1.9}$$

Определение 7. *Задача Коши поставлена корректно на отрезке $[0, t_0]$ если: 1) при любом $u_0 \in D(A)$ существует ее единственное решение и это решение непрерывно зависит от начальных данных в том смысле, что из $x_0(0) \to 0$ следует, что $x_n(t) \to 0$ равномерно по t на каждом компакте из $[0, t_0]$.*

Справедлива теорема [1, с. 64]) о том, что задача (1.7)–(1.9) равномерно корректна тогда и только тогда, когда A является генератором (C_0)– полугруппы $T(t)$, при этом решение имеет вид

$$u(t) = T(t)\varphi, \tag{1.10}$$

и существуют константы M и ω, не зависящие от φ такие, что выполняется оценка

$$\|u(t)\| \leq Me^{\omega t}\|\varphi\|. \tag{1.11}$$

Аналогично для уравнения (1.8) решается задача с условиями Коши

$$u(0) = u_0, \qquad u'(0) = u_1. \tag{1.12}$$

Эта задача называется равномерно корректной, если существует подпространство $M \subset E$ такое, что задача (1.8)–(1.12) имеет единственное решение для $u_0, u_1 \in M$, и когда $u_0^{(n)}, u_1^{(n)}$, $(n = 0, 1, \dots)$ являются последовательностью начальных данных в M, стремящихся к нулю, то соответствующее решение $u^{(n)}(t)$ стремится к нулю в метрике E, равномерно на каждом компакте из $[0, \infty)$.

Теорема о корректности (Сова, Куреппа, см. [4, с. 176]) утверждает, что задача (1.8)–(1.12) равномерно корректна тогда и только тогда, когда A — генератор (C_0)-косинус функции $C(t)$, при этом решение имеет вид

$$u(t) = C(t)\varphi + \int_0^t C(s)\psi ds, \tag{1.13}$$

и при некоторых константах M и ω, не зависящих от φ и ψ, выполняется оценка

$$\|C(t)\varphi\| \leq Me^{\omega t}\|\varphi\|. \tag{1.14}$$

2. Сильно непрерывные h-полугруппы и h-косинус-функции

Пусть $x \in (a, b) \subset \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ и функция $h(x)$ непрерывно дифференцируемая, строго монотонно возрастающая и такая, что

$$\lim_{x\to a} h(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to b} h(x) = \infty. \tag{2.1}$$

Через $L_{p,\nu,h}$ будем обозначать пространства функций $\varphi(x)$, определяемые нормой

$$\|\varphi\|_{L_{p,\nu,h}} = \left[\int_a^b e^{\nu h(x)}|\varphi(x)|^p dh\right]^{\frac{1}{p}}, \qquad p \geq 1, \nu \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

При $t \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in L_{p,\nu,h}$ рассмотрим семейство операторных функций, заданных выражением

$$T(t)\varphi(x) = \varphi[h^{-1}(h(x) + t)]. \tag{2.3}$$

Справедлива

Теорема 1. *Операторное семейство, заданное соотношением (2.3), является сильно непрерывной группой линейных преобразований в пространстве $L_{p,\nu,h}$.*

Доказательство. Для $\varphi \in L_{p,\nu,h}$ имеем

$$T(t)\varphi\|^p_{L_{p,\nu,h}} = \int_a^b e^{\nu h(x)}|\varphi[h^{-1}(h(x)+t)]|^p h(x). \tag{2.4}$$

Замена $h^{-1}(h(x) + t) = s$ дает соотношение

$$\|T(t)\varphi\|^p_{L_{p,\nu,h}} = e^{-\nu t}\int_a^b = e^{\nu h(s)}|\varphi(s)|^p dh(s). \tag{2.5}$$

Отсюда следует равенство

$$\|T(t)\varphi\|_{L_{p,\nu,h}} = e^{-\frac{\nu t}{p}}\|\varphi\|_{L_{p,\nu,h}}, \tag{2.6}$$

дающее норму полугруппы T в $L_{p,\nu,h}$.

Далее нетрудно видеть выполнение необходимых групповых сдвигов

$$1.\, T(0)\varphi = \varphi, \qquad 2.\, T(t+s)\varphi = T(t)T(s)\varphi. \tag{2.7}$$

Для доказательства сильно непрерывности имеем

$$\|T(t)\varphi(x) - \varphi(x)\|^p_{L_{p,\nu,h}} = \int_a^b e^{\nu} h(x)|\varphi[h^{-1}(h(x)+t)] - \varphi(x)|^p dh.$$

Делая замену $h(x) = s$, получаем

$$\|T(t)\varphi(x) - \varphi(x)\|^p_{L_{p,\nu,h}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu s}|\varphi[h^{-1}(t+s)] - \varphi[h^{-1}(s)]|ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu s}|\psi(t+s) - \psi(s)|^p ds, \tag{2.8}$$

здесь $\varphi(s) = \varphi[h^{-1}(s)]$.

Из (2.8), пользуясь непрерывностью L_p-весовых норм, и переходя к пределу при $t \to \infty$ в (2.8), получаем

$$\lim_{t\to 0+} \|T(t)\varphi - \varphi\|_{L_{p,\nu,h}} = 0, \tag{2.9}$$

что и доказывает теорему. □

Следствие 1. *Семейство преобразований*

$$C(t)\varphi = \frac{1}{2}[T(t)\varphi + T(-t)\varphi] \tag{2.10}$$

является сильно непрерывной косинус-функцией в $L_{p,\nu,h}$. При этом из (2.6) и (2.10) следует оценка

$$\|C(t)\varphi\|_{L_{p,\nu,h}} \le \operatorname{ch}(\frac{\nu}{p}t)\|\varphi\|_{L_{p,\nu,h}}. \tag{2.11}$$

Следствие 2. *При $t \ge 0$ и $\nu \ge 0$ $T(t)$ является сжимающей полугруппой $T_+(t)$ с нормой*

$$\|T_+(t)\|_{L_{p,\nu,h}} = e^{-\nu t}, \tag{2.12}$$

а при $\nu \le 0$ полугруппа $T_-(t) = T(-t)$ является сжимающей с нормой

$$\|T_-(t)\|_{L_{p,\nu,h}} = e^{\nu t}. \tag{2.13}$$

Теорема 2. *Полугруппы $T_+(t)$, $T_-(t)$ и косинус-функция $C(t)$ имеют своими генераторами операторы, заданные выражениями:*

$$a)\, T'_\pm(0)\varphi(x) = \pm\frac{\varphi'(x)}{h'(x)} = \pm\frac{d\varphi}{dh} = \mathbb{D}_{\pm,h}\varphi \tag{2.13}$$

с областью определения $D(\mathbb{D}_{\pm,h}) = \{\varphi \in L_{p,\nu,h}, \frac{d\varphi}{dh} \in L_{p,\nu,h}\}$.

$$b)\, C''(0)\varphi(x) = \frac{1}{h'(x)}\left(\frac{\varphi'(x)}{h'(x)}\right)' = \mathbb{D}^2_h\varphi, \tag{2.14}$$

с областью определения $D(\mathbb{D}^2_h) = \{\varphi \in L_{p,\nu,h}, D^2_h \in L_{p,\nu,h}\}$.

3. Дробные степени операторов $\mathbb{D}_{\pm h}$ и $\mathbb{D}_h^2$

Из равенств (2.12) и (2.13) следует, что, в соответствии с К. Иосидой [5, с. 324], C_0-полугруппы $T_\pm(t)$ являются равностепенно непрерывными и, таким образом, их генераторы $\mathbb{D}_{\pm h}$ обладают тем свойством, что для операторов $-\mathbb{D}_{\pm h}$ определены дробные степени $(-\mathbb{D}_{\pm h})^\alpha$, $(0 < \alpha \leq 1)$. При этом, операторы $\widetilde{\mathbb{D}}_{\pm h}^\alpha = -(-\mathbb{D}_{\pm h}^\alpha)$ являются генераторами C_0-полугрупп $T_\pm(t, \widetilde{D}_{\pm h}^\alpha)$. Отметим, что из результата [6] и (2.12), (2.13) для этих полугрупп следуют оценки

$$\|T_\pm(t, \widetilde{\mathbb{D}}_{\pm h}^\alpha)\| \leq e^{-\left(\frac{|\nu|}{p}\right)^\alpha} t. \tag{3.1}$$

Вместе с тем для операторов $-\mathbb{D}_{\pm h}$ определены и отрицательные дробные степени $(-\mathbb{D}_{\pm n})^{-\alpha}$, $(0 < \alpha < 1)$, в соответствии с формулами (5.29) [1, с. 150] имеющие вид

$$(-\mathbb{D}_{\pm h}^{-\alpha})\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} T_\pm(t)\varphi(x)dt. \tag{3.2}$$

В нашем случае представление $T_\pm(t)\varphi(x) = \varphi[h^{-1}(h(x) \pm t)]$ дает следующие виды этих операторов

$$(-\mathbb{D}_{+h}^{-\alpha})\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \varphi[h^{-1}(h(x) + t)]dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b [h(s) - h(x)]^{\alpha-1} \varphi(s) dh(s), \tag{3.3}$$

$$(-\mathbb{D}_{-h}^{-\alpha})\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x [h(x) - h(s)]^{\alpha-1} \varphi(s) dh(s). \tag{3.4}$$

Используя (2.12), (2.13) и (3.2), получаем оценки при $t \geq 0$

$$\|(-\mathbb{D}_{+h}^{-\alpha})\varphi\|_{p,\nu,h} \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} |T_+(t)| dt \cdot \|\varphi\|_{p,\nu,h} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-\frac{\nu}{p}t} dt \cdot \|\varphi\|_{p,\nu,h} = \left(\frac{p}{\nu}\right)^\alpha \cdot \|\varphi\|_{p,\nu,h}. \tag{3.5}$$

Аналогично

$$\|(-\mathbb{D}_{-h}^{-\alpha})\varphi\|_{p,\nu,h} \leq \left(\frac{p}{|\nu|}\right)^\alpha \cdot \|\varphi\|_{p,\nu,h}. \tag{3.6}$$

Заметим, что операторы $(-\mathbb{D}_{+h})^\alpha$ совпадают с интегралами $J_{a+,h}^\alpha$, при $h(x) = x$, называемыми в [10, с. 248] дробными интегралами функции $\varphi(x)$ по функциям $g(x)$ порядка α.

Частными случаями таких интегралов являются интегралы Эрдейи–Коббера при $h(x) = x^\tau$ и интегралы Адамара при $h(x) = \ln x$, $x \in (0, \infty)$ [1, с. 251].

Однако в [3] оценок вида (3.5), (3.6) не приводится, так как интегралы рассматриваются в нормах пространств L_1, то есть при $\nu = 0$. Но эти пространства не инвариантны относительно рассматриваемых операций даже в случае дробных интегралов Римана–Лиувиля (см. утверждение в [10, с. 94]).

4. Обобщенное телеграфное уравнение

Пусть $x \in (a, b)$, $t \in \mathbb{R}$ и $\mathbb{D}_{h,x} = \frac{\partial}{\partial h(x)}$. Рассмотрим уравнение

$$\mathbb{D}_{h,x}^2 \omega(t, x) + 2\beta \mathbb{D}_{h,x} \omega(t, x) = a_0 \frac{\partial^2 \omega(t, x)}{\partial t^2} + 2b_0 \frac{\partial \omega(t, x)}{\partial t} + c_0 \omega(t, x). \tag{4.1}$$

В случае $h(x) = x$, $\beta = 0$ уравнение (4.1) является классическим телеграфным уравнением [3, с. 90].

Решением уравнения (4.1) будем называть функцию $\omega(t, x)$ дважды непрерывно дифференцируемую по $t \in \mathbb{R}$, $x \in (a, b)$ и удовлетворяющую уравнению (4.1).

Для уравнения (4.1) рассматривается задача Коши отыскания решения этого уравнения удовлетворяющего условиям

$$\omega(0, x) = \varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial \omega}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \tag{4.2}$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ такие, что $\varphi \in L_{p,\nu,h}$, $\mathbb{D}_{h,x}\varphi \in L_{p,\nu,h}$, $\psi \in L_{p,\nu,h}$, $\mathbb{D}_{h,x}\psi \in L_{p,\nu,h}$.

Из выше приведенных результатов следует

Теорема 3. *Если коэффициенты a_0, b_0, c_0, β такие, что выполняется неравенство*

$$a_0(c_0 + \beta^2) \le b_0^2, \tag{4.3}$$

то задача (4.1)–(4.2) равномерно корректна, и ее решение имеет вид

$$\omega(t, x) = e^{-\frac{b_0}{a_0}t}[C_f(t)\varphi(x) + \int_0^t C_a(s)\psi(s)ds], \tag{4.4}$$

где

$$C_a(t)\varphi(x)\psi(x) = C_0(t)\varphi(x) + \frac{at}{2}\int_0^t (t^2 - s^2)^{-\frac{1}{2}} I_1[a(t^2 - s^2)^{\frac{1}{2}} C_0(s)\varphi(x), \tag{4.5}$$

здесь

$$C_0(s)\varphi(x) = \frac{1}{2}[T\sqrt{a_0}s) + T(-\sqrt{a_0}s)]\varphi(x),$$

T— полугруппа вида (2.3), $a = \frac{b_0 - a_a(c_0+\beta^2)}{a_0^2}$, I_1— модифицированная функция Бесселя первого рода.

Доказательство. Вводя функцию

$$u(t, x) = e^{\frac{b_0}{a_0}t + \beta h(x)}\omega(t, x), \tag{4.6}$$

приведем задачу (4.1)–(4.2) к виду

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = \frac{1}{a_0}\mathbb{D}_{h,x}^2 u(t, x) + au(t, x) \tag{4.7}$$

$$u(0, x) = e^{\beta h(x)}\varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{b_0}{a_0}e^{\beta h(x)}\psi(x). \tag{4.8}$$

При этом, в силу равенств

$$\|u(t)\|_{p,\nu-\beta p,h}^p = \int_a^b e^{(\nu-\beta p)h(x)}|u(t, x)|^p dh(x) =$$

$$= \int_a^b e^{\nu h(x)}|\omega(t, x)|^p dh(x) = \|\omega\|_{p,\nu,h}^p \tag{4.9}$$

условие (4.2) переходит в условия

$$\|u(0, x)\|_{p,\nu-\beta p,h} = \|\varphi\|_{p,\nu,h}, \tag{4.10}$$

$$\| \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} \|_{p,\nu-\beta p,h} = \left|\frac{b_0}{a_0}\right| \cdot \|\psi\|_{p,\nu,h}. \tag{4.11}$$

Так как оператор $\frac{1}{a_0}\mathbb{D}^2_{h,x}$ является генератором косинусной функции $C(t)\varphi(x) = \frac{1}{2}[T(t)+T(-t)]\varphi$, то в силу (1.6) выполняются все условия теоремы корректности Совы и Куреппы. Отсюда следует доказательство теоремы. □

В заключение заметим, что из теоремы 3 следует равномерная корректная разрешимость задачи Коши для классического телеграфного уравнения (0.1), в пространствах $L_{p,\nu}$ с $\|\varphi\|_{p,\nu} = [\int_0^\infty e^{\nu x}|\varphi(x)|^p dx]^{\frac{1}{p}}$, так как в этом случае $\beta = 0$, $h(x) = x$ и, следовательно, условие (4.11) выполняется в силу [3, с. 90, соотношения 10].

Литература

1. Крейн, С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. – М.: Наука, Глав. ред. физ-мат. лит-ры, 1967. – 464 с.
2. Свиридюк, Г. А. Задача Коши для линейного операторного уравнения типа Соболева с неположительным оператором при производной / Г.А. Свиридюк // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23. – № 10. – С. 1823–1825.
3. Кошляков, Н.С. Основные дифференциальные уравнения математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М.: Физ-мат. лит., 1962. – 767 с.
4. Голдстейн, Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Дж. Голдстейн. – Киев: Выща школа, 1989. – 347 с.
5. Иосида, К. Функциональный анализ: учебник / К. Иосида; пер. с англ. В.М. Волосова. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
6. Костин, В.А. Операторный метод Маслова–Хевисайда и C_0-операторный интеграл Дюамеля / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // ДАН. – 2013. – Т. 452, №4. – С. 367–370.
7. Костин, В.А. Элементарны полугруппы преобразований и их производящие уравнения / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // ДАН. – 2014. – Т. 455, № 2. – С. 142–146.
8. Костин, В.А. О корректной разрешимости краевых задач для уравнений второго порядка / В.А. Костин, М.Н. Небольсина // ДАН. – 2009. – Т. 428, №1. – С. 20–23.
9. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко, Е.И. Пустыльник, П.Е. Соболевский. – М.: Наука, 1966. – 500 с.
10. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 687 с.

Владимир Алексеевич Костин, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическое моделирование», Математический факультет, Воронежский государственный университет (г. Воронеж, Российская Федерация), vlkostin@mail.ru.

Алексей Владимирович Костин, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Математическое моделирование», Математический факультет, Воронежский государственный университет (г. Воронеж, Российская Федерация), leshakostin@mail.ru.

Салим Бадран Джасим Салим, аспирант, кафедра «Математическое моделирование», Математический факультет, Воронежский государственный университет (г. Воронеж, Российская Федерация), bjs-78@yahoo.com.

Поступила в редакцию 21 мая 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University,
Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software",
2014, vol. 7, no. 3, pp. 50–59.

MSC 39-02 **DOI: 10.14529/mmp140305**

On the Well-Posedness of the Cauchy Problem for the Generalized Telegraph Equations

V.A. Kostin, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation, vlkostin@mail.ru,
A.V. Kostin, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation, leshakostin@mail.ru,
Salim Badran Yasim Salim, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation, bjs-78@yahoo.com

This paper establishes the uniform well-posedness of the Cauchy problem for generalized telegraph equations with variable coefficients, of which the classical telegraph equation is a particular case. The well-posedness of a mathematical problem is one of the main requirements for its numerical solution.

For the classical telegraph equation, Riemann's method enables us to solve the Cauchy problem in the class of twice continuously differentiable functions explicitly. The question of stability of the solution in dependence on the initial data, which requires us to work in suitable metric spaces, usually is not discussed; however, it appears to be one of the most important questions once the existence and uniqueness of the solution are known. In this note we use the theory of continuous semigroups of linear operators to establish the uniform well-posedness of the Cauchy problem in the spaces of integrable functions with exponential weight for several classes of differential equations with variable coefficients. We obtain the exact solution to the Cauchy problem and indicate conditions on the coefficients ensuring that the problem is uniformly well-posed in certain functional spaces. These results imply the uniform well-posedness of the Cauchy problem for the classical telegraph equation with constant coefficients.

Keywords: telegraph equation; well-posedness; semigroups; cosine function; Cauchy problem; fractional powers of operators.

References

1. Krein S.G. *Linear Differential Equations in Banach Spaces.* Birkhuser, Boston, 1982. DOI: 10.1007/978-1-4684-8068-9
2. Sviriduk G.A. [The Couchy Probem for a Linear Operator Equation with a Nonpositive Operator at the Derivative of Sobolev Type]. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1987, vol. 23, no. 10, pp. 1823–1825. (in Russian)
3. Koshlykov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. it Osnovnye differentsial'nye uravneniya matematicheskoy fiziki [Principal Differential Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Fizmatlit, 1962. 767 p.
4. Goldstein J.A. *Semigroups of Linear Operators and Applications.* Oxford Univ. Press, New York, 1985.
5. Yosida K. *Functional Analysis.* Springer Verlag, Berlin, 1965.
6. V. A. Kostin, A. V. Kostin, D. V. Kostin C_0-Operator Laplace Integral and Boundary Value Problems for Operator Degenerate Equations. *Doklady Mathematics*, 2011, vol. 84, issue 3, pp. 770–773. DOI: 10.1134/S1064562411060111

7. Kostin V.A., Kostin A.V., Kostin D.V. On Exact Solutions of the Cauchy Problem for Some Parabolic and Hyperbolic Equations. *Doklady Mathematics*, 2013, vol. 87, issue 1, pp. 12–14. DOI: 10.1134/S1064562413010031
8. Kostin V.A., Nebol'sina M.N. Well-Posedness of Boundary Value Problems for a Second-Order Equation. *Doklady Mathematics*, 2009, vol. 80, issue 2, pp. 650–652. DOI: 10.1134/S1064562409050044
9. Krasnosel'skii M.A., Zabreyko P.P., Pustylnik E.I., Sobolevski P.E. *Integral Operators in Spaces of Summable Functions*. Noord Hoff, Leyden, 1976. DOI: 10.1007/978-94-010-1542-4
10. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications]. Minsk, Nauka i tekhnika, 1987. 687 p. (in Russian)

Received May 21, 2014