УДК 517.9 **DOI: 10.14529/mmp140201**

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

А.А. Замышляева

Статья содержит обзор результатов автора в области математических моделей на основе уравнений соболевского типа высокого порядка. Теория построена на основе известных фактов по разрешимости начальных (начально-конечных) задач для уравнений соболевского типа первого порядка. Идея базируется на обобщении теории вырожденных (полу)групп операторов на случай уравнений соболевсого типа высокого порядка: расщеплении пространств, действий всех операторов, построении пропагаторов и фазового пространства однородного уравнения, а также множества допустимых начальных значений для неоднородного уравнения. Мы используем уже хорошо зарекомендовавший себя при решении уравнений соболевского типа метод фазового пространства, заключающийся в редукции сингулярного уравнения к регулярному, определенному на некотором подпространстве исходного пространства. В работе проводится редукция математических моделей к начальным (начально-конечным) задачам для абстрактного уравнения соболевского типа высокого порядка. Полученные результаты могут найти дальнейшее применение при исследовании задач оптимального управления, нелинейных математических моделей, а также для построения теории уравнений соболевского типа высокого порядка в квазибанаховых пространствах.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа высокого порядка; фазовое пространство; пропагаторы; начально-конечная задача; относительный спектр.

Введение

Актуальность изучения математических моделей на основе уравнений соблевского типа высокого порядка обусловлена необходимостью исследования важных прикладных задач, в частности, в области физики атмосферы, физики плазмы, теории электрических цепей, теории ползучести металлов, динамики колебаний стратифицированной жидкости, теории фильтрации, биологии и других. Именно развитие теории уравнений соболевского типа [1] позволило поставить вопрос об аналитическом и численном исследовании как существующих задач, так и новых в рамках сложившихся направлений математического моделирования, например, в теории звуковых и молекулярных волн, гидродинамике, теории упругости и других, описываемых уравнениями высокого порядка [2–8].

Несмотря на то, что первые исследования уравнений неразрешенных относительно старшей производной по времени появились еще в работах А. Пуанкаре в 1885 году [9], а систематическое изучение начально-краевых задач для таких уравнений началось в 40-х годах прошлого столетия с работ С.Л. Соболева [10], в настоящее время теория уравнений соболевского типа активно развивается и переживает пору бурного расцвета. Сформировались научные направления, вокруг которых сложились научные школы [11–17].

Данная работа проведена в рамках направления, возглавляемого Г.А. Свиридюком, и посвящена исследованию математических моделей на основе неклассических уравнений математической физики высокого порядка. В статье описываются разработанные автором абстрактные методы [18, 20], которые применяются к исследованию следующих математических моделей:

Математическая модель Дежен линейных волн в смектиках. Уравнение линейных волн в смектиках [21], впервые полученное P.G. de Gennes, имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_3 u = \alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Delta_2 u,\ \alpha_1 > 0, \tag{1}$$

где $\Delta_3 = \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2},\ \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$. Исходная модель имеет смысл в цилиндрической области по переменным $\{z, x_1, x_2\} \in [a, b] \times \Omega$. В случае установившихся звуковых колебаний в смектике

$$u(x_1, x_2, z, t) = v(x_1, x_2, z)\exp(-i\omega t),$$

исходное уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\Delta_2 v + \alpha_2 v) + \alpha_2 \Delta_2 v = 0,\ \alpha_2 = \omega^2 \alpha_1^{-1}. \tag{2}$$

Дополним это уравнение начально-краевыми условиями

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_z(x, 0) = v_1(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega,$$

$$v(x, z) = 0, \quad (x, z) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}. \tag{3}$$

Линеаризованная математическая модель Benney – Luke. В цилиндре $[0, l] \times \mathbb{R}$ рассмотрим линеаризованное уравнение Benney – Luke [22].

$$u_{tt} - u_{xx} + a u_{xxxx} - b u_{xxtt} = 0, \tag{4}$$

с краевыми условиями Бенара

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = u(l, t) = u_{xx}(l, t) = 0. \tag{5}$$

Математическая модель (4), (5) с тем или иным начальным условием описывает двустороннее распространение длинных волн на мелкой воде с учетом поверхностного натяжения.

Математическая модель колебаний в конструкции. Пусть $G = G(\mathcal{V}; \mathcal{E})$ – конечный связный ориентированный граф, где $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=1}^m$ – множество вершин, а $\mathcal{E} = \{E_j\}_{j=1}^n$ – множество дуг. Мы предполагаем, что каждая дуга имеет длину $l_j > 0$ и толщину $d_j > 0$. На графе G рассмотрим уравнения Буссинеска – Лява [23]

$$\lambda u_{jtt} - u_{jxxtt} = \alpha(u_{jxxt} - \lambda' u_{jt}) + \beta(u_{jxx} - \lambda'' u_j),\ x \in (0, l_j),\ t \in \mathbb{R}, j = \overline{1, n}. \tag{6}$$

Для уравнений (6) в каждой вершине $V_i,\ i = \overline{1, m}$ зададим краевые условия

$$\sum_{j: E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0, t) - \sum_{k: E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k, t) = 0, \tag{7}$$

$$u_s(0, t) = u_j(0, t) = u_k(l_k, t) = u_m(l_m, t), \tag{8}$$

для всех $E_s, E_j \in E^\alpha(V_i),\ E_k, E_m \in E^\omega(V_i)$. Здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине V_i. Если дополнить (7), (8) начальными условиями

$$u_j(x, 0) = u_{0j}(x),\ u_{jt}(x, 0) = u_{1j}(x), \ \text{ для всех } x \in (0, l_j),\ j = \overline{1, n}, \tag{9}$$

то получим математическую модель, представляющую процессы колебаний в конструкции из тонких упругих стержней. Функции $u_j(x, t)$ определяют продольное смещение в точке x

в момент времени t на j-м элементе конструкции. Параметры $\lambda, \lambda', \lambda'', \alpha$ и β характеризуют материал, из которого изготовлены стержни.

Математические модели (2), (3) и (4), (5) с тем или иным начальным (начально-конечным) условием в подходящих банаховых пространствах могут быть редуцированы к соответствующим задачам для неполного уравнения соболевского типа высокого порядка

$$Lu^{(n)} = Mu + f \tag{10}$$

с относительно p-ограниченным или относительно p-секториальным оператором в правой части.

Разработанная автором теория полных уравнений соболевского типа высокого порядка

$$Au^{(n)} = B_{n-1}u^{(n-1)} + ... + B_0u + f \tag{11}$$

с относительно полиномиально ограниченным пучком операторов позволяет исследовать математическую модель (6)–(9).

Стандартной задачей для уравнений (10), (11) является задача Коши

$$u^{(m)}(0) = u_m,\ m = 0, \ldots, n-1. \tag{12}$$

Наряду с задачей (12) для уравнений соболевского типа ставится условие Шоуолтера – Сидорова [24]

$$L(u^{(m)}(0) - u_m) = 0, m = 0, \ldots, n-1. \tag{13}$$

Обе задачи в зависимости от методов исследования могут пониматься в различных смыслах (классическом, обобщенном, ослабленном, сильном и т.д.), однако очевидно, что задача (13) более общая, нежели (12). В тривиальном случае (существование обратного оператора L) обе задачи совпадают, а значит, совпадают и их решения. Однако, задача Шоуолтера – Сидорова для уравнений соболевского типа более естественна, нежели задача Коши. В данной работе рассматривается задача Шоуолтера – Сидорова в более общей постановке:

$$P(u^{(m)}(0) - u_m) = 0,\ m = 0, \ldots, n-1, \tag{14}$$

где P – спектральный проектор. При проведении вычислительных экспериментов условия Шоуолтера – Сидорова предпочтительнее, нежели условия Коши, так как не возникает необходимости проверки принадлежности начальных значений фазовому пространству уравнения.

Естественным обобщением задачи (14) является начально-конечная задача [25]

$$P_{in}(u^{(m)}(0) - u_m^0) = 0,\ \ P_{fin}(u^{(m)}(T) - u_m^T) = 0,\ \ m = 0, \ldots, n-1. \tag{15}$$

Здесь P_{in} и P_{fin} – специальным образом построенные относительно спектральные проекторы. Термин «начально-конечная задача» появился относительно недавно и отражает тот факт, что для уравнения (10) или (11) часть данных задается в начале временнóго промежутка [0,T], а другая часть – в конце. Первоначально она называлась «задачей сопряжения» и рассматривалась как обобщение задачи с данными на свободной поверхности. Именно в этом контексте была построена теория таких задач для линейных уравнений соболевского типа первого порядка, и разработаны приложения этой теории.В данной работе эти идеи и методы распространены на случай уравнений соболевского типа высокого порядка. Необходимо отметить, что в настоящее время начально-конечные задачи для неклассических уравнений математической физики активно изучаются, в том числе и на множествах различной геометрической структуры [26].

Наш подход основан на концепции относительного спектра, предложенной Г.А. Свиридюком [1, 27], и развитой его учениками [28–30]. Кроме того, методы, предложенные Г.А. Свиридюком, легли в основу теории оптимального управления [43, 32], стали фундаментом алгоритмов численного решения уравнений леонтьевского типа (т.е. конечномерных уравнений соболевского типа) [33], которые в свою очередь сыграли важную роль в численных исследованиях экономических [34, 35] и технических моделей [36, 37].

Результаты, представленные автором, легли в основу аналитических и численных исследований полулинейных уравнений соболевского типа второго порядка [38, 44], находят свое применение при исследовании стохастических уравнений [40, 41].

Статья кроме вводной части и списка литературы содержит шесть параграфов. Первый параграф посвящен изучению абстрактной задачи Коши для уравнения соболевского типа высокого порядка с относительно p-ограниченным оператором [19]. Эти результаты применяются во втором параграфе для исследования математической модели линейных волн в смектиках [42]. В-третьем параграфе рассматривается задача Коши и начально-конечная задача для уравнения соболевского типа высокого порядка (10) в случае (L, n, p)-секториальности оператора M. Данные абстрактные результаты проиллюстрированы конкретным примером, приведенным в четвертом параграфе. Здесь исследуется математическая модель Бенни – Люка с начальным (начально-конечным) условием [43]. В пятом параграфе приводится разработанная автором теория относительно полиномиально ограниченных пучков операторов [29], которая используется в шестом параграфе при исследовании математической модели продольных колебаний в конструкции на основе уравнений Буссинеска – Лява на конечном связном ориентированном графе, результаты которой опубликованы в [44].

Наконец заметим, что все рассмотрения проводятся в вещественных банаховых пространствах, однако при рассмотрении «спектральных вопросов» вводится их естественная комплексификация. Все контуры ориентированны движением против часовой стрелки и ограничивают области, лежащие слева при таком движении.

1. Относительно p-ограниченные операторы

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства и операторы L, $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (линейны и непрерывны).

Определение 1. *Множество*

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$$

называется резольвентным множеством оператора M относительно оператора L (короче, L-резольвентным множеством оператора M). Множество $\mathbb{C}\backslash\rho^L(M) = \sigma^L(M)$ называется спектром оператора M относительно оператора L (короче, L-спектром оператора M).

Замечание 1. *L-резольвентное множество оператора M всегда открыто, и, следовательно, L-спектр оператора M всегда замкнут.*

Определение 2. *Оператор-функции*

$$(\mu L - M)^{-1}, \quad R^L_\mu = (\mu L - M)^{-1}L, \quad L^L_\mu = L(\mu L - M)^{-1}$$

с областью определения $\rho^L(M)$ называются соответственно резольвентой, правой резольвентой, левой резольвентой оператора M относительно оператора L (короче, L-резольвентой, правой L-резольвентой, левой L-резольвентой оператора M).

Теорема 1. [1] *L-резольвента, правая и левая L-резольвента оператора аналитичны в своей области определения.*

Определение 3. *Оператор M называется спектрально ограниченным относительно оператора L (короче, (L,σ)-ограниченным), если*

$$\exists a>0\ \forall\mu\in\mathbb{C}:(|\mu|>a)\Rightarrow(\mu\in\rho^L(M)).$$

Замечание 2. *Пусть существует оператор $L^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F},\mathfrak{U})$. Оператор M $(L,\sigma)-$ограничен точно тогда, когда ограничен оператор $L^{-1}M$ (или ML^{-1}).*

Лемма 1. [1] *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда операторы*

$$P=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R_\lambda^L(M)d\lambda \text{ и } Q=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma L_\lambda^L(M)d\lambda$$

являются проекторами, причем $P:\mathfrak{U}\to\mathfrak{U}$ и $Q:\mathfrak{F}\to\mathfrak{F}$. Здесь $\Gamma=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|=r>a\}$.

Положим $\mathfrak{U}^0=\ker P$, $\mathfrak{F}^0=\ker Q$, $\mathfrak{U}^1=\operatorname{im}P$, $\mathfrak{F}^1=\operatorname{im}Q$. Обозначим через $L_k(M_k)$ сужение оператора L (M) на подпространство $\mathfrak{U}^k$, $k=0,1$.

Теорема 2. [1] *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда*
(i) операторы $L_k,M_k:\mathfrak{U}^k\to\mathfrak{F}^k, k=0,1$;
(ii) существует оператор $M_0^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F}^0,\mathfrak{U}^0)$;
(iii) существует оператор $L_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F}^1,\mathfrak{U}^1)$;
(iv) оператор $M_1\in\mathcal{L}(\mathfrak{U}^1,\mathfrak{F}^1)$.

В условиях теоремы 2 построим операторы $H=M_0^{-1}L_0\in\mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ и $S=L_1^{-1}M_1\in\mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$. Тогда

$$(\mu L-M)^{-1}=\left(-\sum_{k=0}^{\infty}\mu^kH^k\right)M_0^{-1}(\mathbb{I}-Q)+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k}S^{k-1}L_1^{-1}Q. \tag{16}$$

Определение 4. *Бесконечно удаленная точка L-резольвенты оператора M называется*
(i) устранимой особой точкой, если $H\equiv\mathbb{O}$;
(ii) полюсом порядка, если $H^p\neq\mathbb{O},H^{p+1}\equiv\mathbb{O}$; $p\in\mathbb{N}$,
(iii) существенно особой точкой, если $H^q\neq\mathbb{O}$, $\forall q\in\mathbb{N}$.

Далее устранимую особую точку так же будем называть *полюсом порядка нуль.*

Замечание 3. *В дальнейшем (L,σ)-ограниченный оператор M, будем называть (L,p)-ограниченным, если точка ∞ является полюсом порядка $p\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ его L-резольвенты.*

Определение 5. *Обозначим через $\varphi_0\in\ker L\backslash\{0\}$ собственный вектор оператора L. Упорядоченное множество $\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots\}\subset\operatorname{im}L$ называется цепочкой M-присоединенных векторов собственного вектора φ_0, если*

$$L\varphi_{q+1}=M\varphi_q,\ q=0,1,2\ldots,\quad \varphi_q\notin\ker L \text{ при } \quad q=1,2,\ldots$$

Говорят, что цепочка конечна, если существует такой M-присоединенный вектор φ_p, что либо $\varphi_p\notin\mathrm{dom}M$, либо $M\varphi_p\notin\mathrm{im}L$. Мощность конечной цепочки называется ее длиной.

Линейная оболочка всех собственных и M-присоединенный векторов оператора L называется M-корневым линеалом оператора L.

Теорема 3. [1] *Пусть оператор L – фредгольмов (т.е.* $\mathrm{ind}L = 0$*). Тогда следующие утверждения эквивалентны*

(i) оператор M (L,p)-ограничен;

(ii) любой собственный вектор оператора L не имеет M-присоединенных векторов высоты больше p.

Определение 6. Оператор-функцию $V^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$ будем называть пропагатором однородного уравнения (10), если для любого $v \in \mathfrak{U}$ вектор-функция $u(t) = V^t v$ будет решением этого уравнения.

Теорема 4. *Пусть оператор $M(L,\sigma)$-ограничен. Тогда формулы*

$$U_m^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^{n-m-1}(\mu^n L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu, \tag{17}$$

где контур $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = R > a\}$, *определяют пропагаторы уравнения* (10) *при всех* $t \in \mathbb{R}$.

Лемма 2. *(i)* $U_m^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R};\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{U}^1))$, $\left(U_m^t\right)_t^{(l)} = U_{m-l}^t$, *где* $m = 0,1,\ldots,n-1$, $l = 0,1,\ldots,m$;

(ii) $\left.\left(U_m^t\right)_t^{(l)}\right|_{t=0} = \mathbb{O}$ *при* $m \neq l$, $\left.\left(U_m^t\right)_t^{(m)}\right|_{t=0} = U_0^0 = P$. *(Напомним, что проектор* $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ *определен в лемме 1).*

Определение 7. Подпространство $\mathcal{P} \subset \mathfrak{U}$ называется фазовым пространством однородного уравнения (10), если
(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (10) лежит в $\mathcal{P}$, т.е. $u(t) \in \mathcal{P}\quad \forall t \in \mathbb{R}$.
(ii) при любых $u_m, m = 0,...,n-1 \in \mathcal{P}$ существует единственное решение задачи (10), (12).

Замечание 4. Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, то в силу непрерывности оператора M фазовым пространством уравнения (10) служит все пространство $\mathfrak{U}$.

Теорема 5. *Пусть оператор $M(L,p)$-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда подпространство $\mathfrak{U}^1$ является фазовым пространством однородного уравнения (10).*

Рассмотрим задачу Коши (12) для неоднородного неполного уравнения соболевского типа (10), где вектор-функцию $f : (-\tau,\tau) \to \mathfrak{F}$ определим позже.

Пусть оператор $M(L,p)$-ограничен, тогда в силу теоремы 2 задача (10), (12) распадается на две независимые задачи

$$H(u^0)^{(n)} = u^0 + M_0^{-1} f^0, \quad (u^0)^{(m)}(0) = u_m^0,\ m = 0,1,\ldots,n-1, \tag{18}$$

$$(u^1)^{(n)} = S u^1 + L_1^{-1} f^1, \quad (u^1)^{(m)}(0) = u_m^1,\ m = 0,1,\ldots,n-1, \tag{19}$$

где операторы $H = M_0^{-1} L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$, $S = L_1^{-1} M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$; вектор-функции $u^0 = (I-P)u$, $f^0 = (I-Q)f$, $u^1 = Pu$, $f^1 = Qf$; векторы $u_m^k \in \mathfrak{U}^k,\quad k = 0,1, m = 0,...,n-1$.

Рассмотрим сначала задачу (18). Пусть $f^0 \in C^{n(p+1)}((-\tau,\tau);\mathfrak{F}^0)$, тогда простой подстановкой можно убедиться, что вектор-функция

$$u^0(t) = -\sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1} (\mathbb{I} - Q) f^{(qn)}(t) \tag{20}$$

является решением уравнения (18). Если вдобавок

$$u_m^0 = -\sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1} \frac{d^{nq+m}}{dt^{2q+m}} f^0(0), m = 0,\ldots,n-1, \tag{21}$$

то вектор-функция (20) служит решением задачи (18).

Перейдем к задаче (19). Пусть вектор-функция $f^1 \in C((-\tau,\tau);\mathfrak{F}^1)$, тогда вектор-функция

$$u^1(t) = \sum_{m=0}^{n-1} V_m^t u_m^1 + \int_0^t V_{n-1}^{t-s} L_1^{-1} Q f(s) ds, t \in (-\tau,\tau) \tag{22}$$

будет решением задачи (19).

Теорема 6. *Пусть оператор $M(L,p)$-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Пусть вектор-функция $f : (-\tau,\tau) \to \mathfrak{F}$ такова, что $f^0 \in C^{n(p+1)}((-\tau,\tau);\mathfrak{F}^0)$, и $f^1 \in C((-\tau,\tau);\mathfrak{F}^1)$. Пусть начальные значения удовлетворяют соотношениям*

$$(I - U_0^0)u_m = -\sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1} \frac{d^{nq+m}}{dt^{nq+m}} f^0(0), \quad m = 0,1,\ldots,n-1.$$

Тогда существует единственное решение задачи (10), (12), которое можно представить в виде $u(t) = u^0(t) + u^1(t)$, где $u^0(t)$ определено формулой (20), а $u^1(t)$ – формулой (22).

2. Математическая модель Дежен линейных волн в смектиках

Начально-краевую задачу для уравнения (2) можно описать в терминах задачи (12) для уравнения (10). Редуцируя математическую модель (2), (3) к задаче (10), (12), положим

$$\mathfrak{U} = \{v \in W_q^{l+2}(\Omega) : v(x) = 0, x \in \partial\Omega\}, \quad \mathfrak{F} = W_q^l(\Omega)$$

или

$$\mathfrak{U} = \{v \in C^{l+2+\gamma}(\Omega) : v(x) = 0, x \in \partial\Omega\}, \quad \mathfrak{F} = C^{l+\gamma}(\Omega),$$

где $W_q^l(\Omega)$ – пространства Соболева $2 \le q < \infty$, $C^{l+\gamma}(\Omega)$ – пространства Гельдера $0 < \gamma < 1$, $l = 0,1,\ldots$. Положим для удобства $\alpha = -\alpha_2$, $\Delta = \Delta_2$. Операторы L и M зададим формулами $L = \Delta - \alpha$, $M = \alpha\Delta$. При любом $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Обозначим через $\{\lambda_k\}$ множество собственных значений однородной задачи Дирихле в области Ω для оператора Лапласа Δ, занумерованное по невозрастанию с учетом кратности, а через $\{\varphi_k\}$ – семейство соответствующих собственных функций, ортонормированных относительно скалярного произведения $< \cdot,\cdot >$ из $L^2(\Omega)$.

Лемма 3. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда оператор M $(L,0)$-ограничен.*

Итак, в силу теоремы 6 справедлива

Теорема 7. *(i) Пусть $\alpha \notin \sigma(\Delta)$. Тогда при любых $v_0, v_1 \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение задачи (2), (3), которое к тому же имеет вид*

$$v(z) = \sum_{\alpha<\lambda_k} < v_0,\varphi_k > \varphi_k ch\sqrt{\frac{\alpha\lambda_k}{\lambda_k-\alpha}}z + \sum_{\alpha>\lambda_k} < v_0,\varphi_k > \varphi_k cos\sqrt{\frac{\alpha\lambda_k}{\alpha-\lambda_k}}z +$$

$$+ \sum_{\alpha<\lambda_k} < v_1,\varphi_k > \varphi_k \sqrt{\frac{\lambda_k-\alpha}{\alpha\lambda_k}} sh\sqrt{\frac{\alpha\lambda_k}{\lambda_k-\alpha}}z +$$

$$+ \sum_{\alpha>\lambda_k} < v_1,\varphi_k > \varphi_k \sqrt{\frac{\alpha-\lambda_k}{\alpha\lambda_k}} sin\sqrt{\frac{\alpha\lambda_k}{\alpha-\lambda_k}}z. \tag{23}$$

(ii) Пусть $\alpha \in \sigma(\Delta)$. Тогда при любых

$$v_0, v_1 \in \mathfrak{U}^1 = \{v \in \mathfrak{U} :< v, \varphi_k >= 0, \lambda = \lambda_k\}$$

существует единственное решение задачи (3),(2), имеющее вид (23).

Замечание 5. Результаты этой теоремы легко транскрибируются в терминах исходного уравнения (1), если учесть связь между функциями u и v.

3. Относительно p-секториальные операторы

Основы теории относительно p-секториальных операторов были заложены Г.А. Свиридюком и развиты в работах его учеников. Мы распространим эти идеи и методы на случай уравнения произвольного порядка. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (линеен, замкнут, плотно определен в $\mathfrak{U}$). Построим множества $\sigma_n^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu^n \in \sigma^L(M)\}$, $\rho_n^L(M) = \mathbb{C} \setminus \sigma_n^L(M)$.

Определение 8. Оператор M назовем (n,p)-секториальным относительно оператора L или (L,n,p)-секториальным, если существуют константы $K > 0$, $\theta \in (\pi/2, \pi)$ такие, что множество

$$S_{\theta,n}^L(M) = \{\mu \in \mathbf{C} : |\arg(\mu^n)| < \theta, \quad \mu \neq 0\} \subset \rho_n^L(M), \tag{24}$$

причем

$$\max\left\{\|R_{(\mu^n,p)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|L_{(\mu^n,p)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\right\} \le \frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p}|\mu_k^n|} \; \forall \mu_k \in S_{\theta,n}^L(M), \quad k = \overline{0,p}. \tag{25}$$

Лемма 4. *[1] Пусть оператор M (L,n,p)-секториален. Тогда длины всех цепочек M-присоединенных векторов ограничены числом p.*

Возьмем $\alpha \in \rho^L(M)$ и редуцируем однородное уравнение (10) к паре эквивалентных ему уравнений

$$R_\alpha^L(M)u^{(n)} = (\alpha L - M)^{-1}Mu, \tag{26}$$

$$L_\alpha^L(M)f^{(n)} = M(\alpha L - M)^{-1}f. \tag{27}$$

Операторы в правых частях (26), (27) можно отождествить с непрерывными операторами, определенными на пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Поэтому уравнения (26), (27) удобно рассматривать как конкретные интерпретации уравнения

$$Av^{(n)} = Bv, \tag{28}$$

определенного на банаховом пространстве $\mathfrak{V}$, причем операторы $A, B \in \mathcal{L}(\mathfrak{V})$. Вектор-функцию $v \in C^n(\mathbb{R}_+;\mathfrak{V})$, удовлетворяющую уравнению (28), будем называть решением этого уравнения.

Определение 9. Оператор-функцию $V^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{V}))$ будем называть пропагатором уравнения (28), если для любого $v \in \mathfrak{V}$ вектор-функция $v(t) = V^t v$ будет решением этого уравнения.

Лемма 5. *Пусть оператор M (L,n,p)-секториален. Тогда интегралы типа Данфорда-Шварца*

$$U_m^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \mu^{n-m-1}(\mu^n L - M)^{-1}Le^{\mu t}d\mu, \tag{29}$$

$$F_m^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \mu^{n-m-1} L(\mu^n L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu, \tag{30}$$

где $t \in \mathbb{R}_+, m = 0, 1, \ldots, n-1$, а $\gamma \subset \rho_n^L(M)$-контур, образованный лучами, выходящими из начала координат под углами θ и $-\theta$, определяют пропагаторы однородного уравнения (26) и (27) соответственно.

Положим $\mathfrak{U}^0 = \bigcap\limits_{m=0}^{n-1} \ker U_m^\bullet = \bigcap\limits_{m=0}^{n-1} \{\varphi \in \mathfrak{U} : U_0^t\varphi = 0 \ \exists t \in \mathbb{R}_+\}$, $\mathfrak{F}^0 = \bigcap\limits_{m=0}^{n-1} \ker F_0^\bullet = \bigcap\limits_{m=0}^{n-1} \{\psi \in \mathfrak{F} : F_0^t\psi = 0 \ \exists t \in \mathbb{R}\}_+$ и через L_0 (M_0) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^0$ $(\mathfrak{U}^0 \cap \operatorname{dom} M)$.

Следствие 1. *В условиях леммы 5 операторы $L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$, $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$, причем существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$.*

Положим $\mathfrak{U}^1 = \operatorname{im} U_0^\bullet = \{u \in \mathfrak{U} : \lim\limits_{t\to 0+} U_0^t u = u\}$, $\mathfrak{F}^1 = \operatorname{im} F_0^\bullet = \{f \in \mathfrak{F} : \lim\limits_{t\to 0+} F_0^t f = f\}$ и через L_1 (M_1) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^1$ $(\mathfrak{U}^1 \cap \operatorname{dom} M)$.

Следствие 2. *В условиях леммы 5 операторы $L_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$, $M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$.*

Очевидно, $\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 \subset \mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 \subset \mathfrak{F}$. В дальнейшем нам потребуются две гипотезы:

$$\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U} \ (\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}), \tag{31}$$

$$\text{существует оператор} \quad L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1). \tag{32}$$

Гипотеза (31) имеет место, например, в случае рефлексивности пространства $\mathfrak{U}$ $(\mathfrak{F})$ (теорема Яги – Федорова [45]). Гипотеза (32) справедлива, если выполнено (31) и $\operatorname{im} L_1 = \mathfrak{F}^1$ (теорема Банаха). Заметим еще, что из (31) вытекает существование проекторов $P = s - \lim\limits_{t\to 0+} U_0^t$ и $Q = s - \lim\limits_{t\to 0+} F_0^t$ в пространствах $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ соответственно.

Следствие 3. *Пусть оператор M (L, n, p)-секториален, причем выполнены* (31), (32). *Тогда оператор $H = M_0^{-1} L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ нильпотентен степени p.*

Теперь у нас все готово для исследования однозначной разрешимости задачи Коши

$$\lim_{t\to 0+} u^{(m)}(t) = u_m, \ m = 0, 1, ..., n-1 \tag{33}$$

для уравнения (10), которое в силу (L, n, p)-секториальности оператора M, условий (31), (32) редуцируется к виду

$$H(u^0)^{(n)} = u^0 + M_0^{-1} f^0, \tag{34}$$

$$(u^1)^{(n)} = S u^1 + L_{in}^{-1} f^1, \tag{35}$$

где $f^0 = (\mathbb{I} - Q)f$, $f^1 = Qf$, $u^0 = (\mathbb{I} - P)u$, $u^1 = Pu$.

Пусть вектор-функция

$$f^0 \in C^{n(p+1)}([0, T]; \mathfrak{F}^0),$$

тогда существует единственное решение уравнения (34), которое к тому же имеет вид

$$u^0(t) = -\sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1} f^{0(nq)}(t).$$

Отсюда непосредственно следует, что начальные значения u_m с необходимостью должны принадлежать множествам

$$\mathcal{M}_f^k = \{u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I} - P)u = -\sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1} f^{0(nq+k)}(0)\},\ k = 0, \ldots, n-1. \tag{36}$$

Перейдем к уравнению (35). Можно показать, что для любых $u_m^1 \in \mathfrak{U}^1$, $m = 0, ..., n-1$ и $f^1 \in C([0,T]; \mathfrak{F}^1)$ существует единственное решение задачи Коши для уравнения (35), которое к тому же имеет вид

$$u^1(t) = \sum_{m=0}^{n-1} V_m^t v_m + \int_0^t V_{n-1}^{t-s} L_1^{-1} f^1(s) ds.$$

Таким образом имеет место

Теорема 8. *Пусть оператор M (L, n, p)-секториален, выполнены условия* (31), (32). *Тогда для любых $u_k \in \mathcal{M}_f^k, k = 0, \ldots, n-1$ и вектор-функции $f = f(t)$, $t \in [0, T]$, указанной выше, существует единственное решение задачи* (34), (35), *которое к тому же имеет вид $u(t) = u^0(t) + u^1(t)$.*

Перейдем к рассмотрению начально-конечной задачи для уравнения соболевского типа высокого порядка с относительно (n, p)-секториальным оператором.

Теорема 9. *Пусть $\sigma^L(M) = \sigma_{in}^L(M) \cup \sigma_{in}^L(M)$, причем $\sigma_{fin}^L(M)$ содержится в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$ и $\partial\Omega \cap \sigma^L(M) = \emptyset$. Тогда существуют проекторы $P_{fin} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q_{fin} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ такие, что операторы $L \in \mathcal{L}(\ker P_{fin}; \ker Q_{fin}) \cap \mathcal{L}(\mathrm{im} P_{fin}; \mathrm{im} Q_{fin})$ и $M \in \mathcal{C}l(\ker P_{fin}; \ker Q_{fin}) \cap \mathcal{C}l(\mathrm{im} P_{fin}; \mathrm{im} Q_{fin})$.*

Положим $P_{in} = P - P_{fin}$, очевидно, $P_{in} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ – проектор. Возьмем $T \in \mathbb{R}_+$, u_m^0, $u_m^T \in \mathfrak{U}$ и рассмотрим задачу

$$\lim_{t \to 0+} P_{in}(u^{(m)}(t) - u_m^0) = 0, \quad P_{fin}(u^{(m)}(T) - u_m^T) = 0 \quad m = 0, \ldots, n-1 \tag{37}$$

для линейного уравнения соболевского типа (10).

Теперь пусть оператор M (L, n, p)-секториален, выполнены условия (31), (32) и условия теоремы 9. Тогда $U_m^t = P_{fin} U_m^t + P_{in} U_m^t = U_{m(fin)}^t + U_{m(in)}^t$, $F_m^t = Q_{fin} F_m^t + Q_{in} F_m^t = F_{m(fin)}^t + F_{m(in)}^t$, причем $U_{m(fin)}^t$ и $F_{m(fin)}^t$ можно представить в виде

$$U_{m(fin)}^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \mu^{n-m-1} R_{\mu^2}^L(M) e^{\mu t} d\mu, \quad F_{fin}^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \mu^{n-m-1} L_{\mu^2}^L(M) e^{\mu t} d\mu, \tag{38}$$

где контур $\Gamma = \partial\Omega$.

Далее, положим $\mathrm{im}\ P_{fin(in)} = \mathfrak{U}_{fin(in)}^1$, $\mathrm{im}\ Q_{fin(in)} = \mathfrak{F}_{fin(in)}^1$. По построению $\mathfrak{U}_{fin} \oplus \mathfrak{U}_{in} = \mathfrak{U}^1$ и $\mathfrak{F}_{fin} \oplus \mathfrak{F}_{in} = \mathfrak{F}^1$. Обозначим через $L_{fin(in)}$ $(M_{fin(in)})$ сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}_{fin(in)}$ $(\mathrm{dom} M \cap \mathfrak{U}_{fin(in)})$. Аналогично следствию 2 нетрудно показать, что операторы $L_{fin(in)} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}_{fin(in)}; \mathfrak{F}_{fin(in)})$, $M_{fin(in)} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}_{fin(in)}; \mathfrak{F}_{fin(in)})$, причем существует оператор $L_{fin(in)}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}_{fin(in)}; \mathfrak{U}_{fin(in)})$, а оператор $S_{in} = L_{in}^{-1} M_{in} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}_{in})$ будет n-секториальным, а оператор $S_{fin} = L_{fin}^{-1} M_{fin} : \mathfrak{U}_{fin} \to \mathfrak{U}_{fin}$ – ограниченным.

Теперь у нас все готово для исследования однозначной разрешимости задачи (37) для уравнения (10), которое в силу (L,n,p)-секториальности оператора M, условий (31), (32) и условий теоремы 9 редуцируется к виду

$$H(u^0)^{(n)} = u^0 + M_0^{-1} f^0, \tag{39}$$

$$(u^{fin})^{(n)} = S_{fin} u^{fin} + L_{fin}^{-1} f^{fin}, \tag{40}$$

$$(u^{in})^{(n)} = S_{in} u^{in} + L_{in}^{-1} f^{in}, \tag{41}$$

где $f^0 = (\mathbb{I} - Q)f$, $f^{fin(in)} = Q_{fin(in)} f$, $u^0 = (\mathbb{I} - P)u$, $u^{fin(in)} = P_{fin(in)} u$.

Теорема 10. *Пусть оператор M (L,n,p)-секториален, выполнены условия (31), (32) и условия теоремы 9. Тогда для любых $u_m^0, u_m^T \in \mathfrak{U}$ и вектор-функции $f = f(t)$, $t \in [0,T]$, существует единственное решение задачи (37), (10), которое имеет вид $u(t) = u^0(t) + u^{fin}(t) + u^{in}(t)$, где*

$u^0(t) = -\sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1} f^{0(nq)}(t)$ – решение уравнения (39);

$u^{fin}(t) = \sum\limits_{m=0}^{n-1} V_{m(fin)}^{t-T} v_m^T - \int_t^T V_{(n-1)(fin)}^{t-s} L_{(fin)}^{-1} f^{fin}(s)ds$ – решение уравнения (40) с конечным условием $u^{fin(m)}(T) = P_{fin}(u_m^T)$;

$u^{in}(t) = \sum\limits_{m=0}^{n-1} V_{m(in)}^{t} v_m^0 + \int_0^t V_{(n-1)(in)}^{t-s} L_{1(in)}^{-1} f^{in}(s)ds$ – решение уравнения (41) с начальным условием $u^{in(m)}(0) = P_{in}(u_m^0)$.

4. Линеаризованная модель Бенни – Люка

Редуцируем математическую модель (4), (5) к уравнению соболевского типа (10) второго порядка. Положим $\mathfrak{U} = \{v \in W_2^2(0,l) : v(0,t) = v(l,t) = 0\}$, $\mathfrak{F} = L_2(\Omega)$; операторы L и M зададим формулами:

$$L = \mathbb{I} - b\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad M = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - a\frac{\partial^4}{\partial x^4}$$

соответственно, $\operatorname{dom} M = \{v \in W_2^4(0,l) : v(0,t) = v_{xx}(0,t) = v(l,t) = v_{xx}(l,t) = 0\}$ Очевидно, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, а оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Лемма 6. *При любых $a, b \in \mathbb{R}$, оператор M $(L,2,0)$-секториален, причем выполнены условия (31), (32).*

Доказательство. Введем в рассмотрение собственные функции однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, определенного в области $\Omega = [0,l]$. Обозначим через $\varphi_k = \sin\frac{\pi k x}{l}$ собственные функции, соответствующие собственным значениям $\lambda_k = -\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$.

L-спектр оператора M имеет вид

$$\sigma^L(M) = \left\{\mu_k = \frac{\lambda_k - a\lambda_k^2}{1 - b\lambda_k},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda_l = \lambda\}\right\}. \tag{42}$$

Поскольку $\lambda_k \sim -k^2$ при $k \to \infty$, то значит, во-первых, существует сектор требуемого раствора, содержащий $\sigma^L(M)$, и следовательно, множество

$$S_{\theta,2}^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu^2)| < \theta, \quad \mu \neq 0\} \subset \rho_2^L(M).$$

Во-вторых, при достаточных больших $|\mu|$, лежащих вне этого множества, имеем

$$\max\ \left\{\|R_{\mu^2}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|L_{\mu^2}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\right\} \le \text{const}\ |\mu|^{-2}$$

$$\forall \mu \in S^L_{\theta,2}(M).$$

Следовательно, оператор M $(L,2,0)$-секториален.

Выясним, выполняются ли условия (31), (32). Поскольку пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ рефлексивны, то в силу леммы 6 и теоремы Яги – Федорова [45] условия (31) выполняются, причем

(i) $\mathfrak{U}^0 = \mathfrak{F}^0 = \{0\}$, $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}$, если $1 - b\lambda_k \neq 0$;

(ii) $\mathfrak{U}^0 = \mathfrak{F}^0 = \ker L = \operatorname{span}\{\varphi_j\}$, $\mathfrak{U}^1 = \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, \varphi_j \rangle = 0\}$,

$\mathfrak{F}^1 = \{f \in \mathfrak{F} : \langle f, \varphi_j \rangle = 0\} = \operatorname{im} L$, если $1 - b\lambda_j = 0$.

Условие (32) тоже выполняется, причем оператор L_1^{-1} можно представить в виде

$$L_1^{-1} = {\sum_k}' \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(1 - b\lambda_k)}.$$

Штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых, для которых $1 - b\lambda_k = 0$. Таким образом, лемма доказана. □

Теорема 11. *При любых $a, b \in \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u_k \in \mathfrak{U}^1$, существует единственное решение задачи*

$$u^{(k)}(0) = u_k, \quad k = 0, 1$$

для уравнения (4) с краевыми условиями (5).

В силу дискретности L-спектра $\sigma^L(M)$ оператора M условия теоремы 9 тоже выполняются, причем для любого замкнутого контура $\gamma \in \mathbb{C}$, ограничивающего область, содержащую конечное множество точек из $\sigma^L(M)$, и не пересекающегося с $\sigma^L(M)$. Итак, все условия теоремы 10 выполнены, и поэтому справедлива

Теорема 12. *При любых $a, b \in \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{R}_+$, u_m^0, $u_m^T \in \mathfrak{U}$, $m = 0, 1$ существует единственное решение*

$$u \in C^2((0,T); \mathfrak{U}) \cap C^1([0,T]; \mathfrak{U})$$

задачи

$$P_{in}(u^{(m)}(0) - u_m^0) = 0, \quad P_{fin}(u^{(m)}(T) - u_m^T) = 0, \quad m = 0, 1$$

для уравнения (4) с краевыми условиями (5).

5. Относительно полиномиально ограниченные пучки операторов

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, операторы $A, B_0, \ldots, B_{n-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Обозначим через $\vec{B}$ пучок операторов $B_{n-1}, \ldots, B_0$.

Определение 10. Множества

$$\rho^A(\vec{B}) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu^n A - \mu^{n-1} B_{n-1} - \ldots - \mu B_1 - B_0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})\}$$

и $\sigma^A(\vec{B}) = \overline{\mathbf{C}} \setminus \rho^A(\vec{B})$ будем называть, соответственно, A - *резольвентным множеством* и A – *спектром пучка* $\vec{B}$.

Определение 11. Оператор-функцию комплексной переменной $R^A_\mu(\vec{B}) = (\mu^n A - \mu^{n-1} B_{n-1} - \ldots - \mu B_1 - B_0)^{-1}$ с областью определения $\rho^A(\vec{B})$ будем называть A-*резольвентой пучка* $\vec{B}$.

Лемма 7. *Пусть операторы $A, B_{n-1}, \dots, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Тогда A-резольвентное множество пучка операторов $\vec{B}$ $\rho^A(\vec{B})$ открыто, A-спектр пучка $\vec{B}$ всегда замкнут.*

Теорема 13. *$R^A_\mu(\vec{B})$ аналитична в своей области определения.*

Определение 12. Пучок операторов $\vec{B}$ называется *полиномиально ограниченным относительно оператора A* (или просто *полиномиально A-ограниченным*), если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \mu \in \mathbf{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (R^A_\mu(\vec{B}) \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})).$$

Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен. Введем одно важное в дальнейшем условие:

$$\int_\gamma \mu^k R^A_\mu(\vec{B}) d\mu \equiv \mathbb{O},\ k = 0, 1, ..., n-2, \tag{A}$$

где контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$.

Замечание 6. *Пусть существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$, тогда условие (A) выполняется.*

Лемма 8. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и выполнено условие (A). Тогда операторы*

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^A_\mu(\vec{B})\mu^{n-1} A d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mu^{n-1} A R^A_\mu(\vec{B}) d\mu \tag{43}$$

являются проекторами в пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно.

Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{U}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathfrak{F}^1 = \operatorname{im} Q$. Из предыдущей леммы следует, что $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\quad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$. Через A^k (B^k_l) обозначим сужение оператора A (B_l) на $\mathfrak{U}^k,\ k = 0, 1;\ l = 0, 1, \dots, n-1$.

Теорема 14. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и выполнено условие (A). Тогда действия операторов расщепляются:*
(i) $A^k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k),\ k = 0, 1$;
(ii) $B^k_l \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k),\ k = 0, 1,\ l = 0, 1, ..., n-1$;
(iii) существует оператор $(A^1)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$.
(iv) существует оператор $(B^0_0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$.

Обозначим $H_0 = (B^0_0)^{-1} A^0, H_k = (B^0_0)^{-1} B^0_{n-k}, k = \overline{1, n-1}, S_k = (A^1)^{-1} B^1_k, k = \overline{0, n-1}$.

Следствие 4. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и выполнено (A). Тогда существует константа $b \in \mathbb{R}_+$ $(b \geq a)$ $\forall \mu \in \mathbb{C}$ $(|\mu| > b) \Rightarrow$*

$$R^A_\mu(\vec{B}) = -\sum_{k=0}^{\infty}(\mu^n H_0 - ... - \mu H_{n-1})^k\, (B^0_0)^{-1}(\mathbb{I} - Q) + \mu^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}(\mu^{-1}S_{n-1} + ... + \mu^{-n}S_0)^k\, (A^1)^{-1}\, Q. \tag{44}$$

Замечание 7. При $n = 1$ представление (44) совпадает с разложением относительной резольвенты оператора в ряд Лорана (16).

Определение 13. Пусть $\ker A \neq \{0\}$, вектор $\varphi_0 \in \ker A \setminus \{0\}$ будем называть собственным вектором оператора A. Упорядоченное множество векторов $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ называется цепочкой $\vec{B}$-присоединенных векторов собственного вектора φ_0, если

$$\begin{gathered} A\varphi_0 = 0; \\ A\varphi_1 = B_{n-1}\varphi_0; \\ A\varphi_2 = B_{n-1}\varphi_1 + B_{n-2}\varphi_0; \\ ... \\ A\varphi_n = B_{n-1}\varphi_{n-1} + B_{n-2}\varphi_{n-2} + ... + B_1\varphi_1 + B_0\varphi_0; \\ A\varphi_{n+q} = B_{n-1}\varphi_{n+q-1} + B_{n-2}\varphi_{n+q-2} + ... + B_1\varphi_{q+1} + B_0\varphi_q; \\ q = 1, 2.., \quad \varphi_l \notin \ker A \setminus \{0\}, \ l = 1, 2, ... \end{gathered} \tag{45}$$

Для присоединенного вектора φ_q определим высоту, равной порядковому номеру вектора в цепочке. Линейную оболочку всех собственных и $\vec{B}$-присоединенных векторов оператора A назовем его $\vec{B}$-корневым линеалом. $\vec{B}$- корневым пространством будем называть замкнутый $\vec{B}$-корневой линеал оператора A.

Цепочка $\vec{B}$-присоединенных векторов может быть бесконечной. В частности, она может быть заполнена нулями, если $\varphi_0 \in \ker A \cap \ker B_{n-1} \cap \ker B_{n-2} \cap ... \cap \ker B_1 \cap \ker B_0$. Но она будет конечной в случае существования такого $\vec{B}$-присоединенного вектора φ_q, что $B_{n-1}\varphi_q + B_{n-2}\varphi_{q-1} + ... + B_0\varphi_{q-n+1} \notin \mathrm{im} A$. Высоту q последнего $\vec{B}$-присоединенного вектора в конечной цепочке $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_q\}$ будем называть длиной этой цепочки.

Теорема 15. *Пусть операторы $A, B_{n-1}, ..., B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, причем оператор A фредгольмов. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(i) Длины всех цепочек $\vec{B}$-присоединенных векторов оператора A ограничены числом $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

(ii) Пучок операторов $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, причем точка ∞ является полюсом порядка не более p A-резольвенты пучка операторов $\vec{B}$.

Определение 14. Определим семейство операторов $\{K_q^1, K_q^2, \ldots, K_q^n\}$ следующим образом:
$K_0^s = \mathbb{O}, s \neq n, \ K_0^n = \mathbb{I}$
$K_1^1 = H_0, \ K_1^2 = -H_{n-1}, \ldots, \ K_1^s = -H_{n+1-s}, \ldots, \ K_1^n = -H_1$
$K_q^1 = K_{q-1}^n H_0, \ K_q^2 = K_{q-1}^1 - K_{q-1}^n H_{n-1}, ..., \ K_q^s = K_{q-1}^{s-1} - K_{q-1}^n H_{n+1-s}, \ldots,$

$$K_q^n = K_{q-1}^{n-1} - K_{q-1}^n H_1, q = 1, 2, ... \tag{46}$$

Определение 15. Точка ∞ называется

(i) *устранимой особой точкой* A-резольвенты пучка $\vec{B}$, если $K_1^1 = K_1^2 = ... = K_1^n \equiv \mathbb{O}$;

(ii) *полюсом* порядка $p \in \mathbb{N}$ A-резольвенты пучка $\vec{B}$, если $K_p^s \neq \mathbb{O}$, при некотором s, но $K_{p+1}^s \equiv \mathbb{O}$, при любом s;

(iii) *существенно особой точкой* A-резольвенты пучка $\vec{B}$, если $K_p^n \not\equiv \mathbb{O}$ при любом $p \in \mathbb{N}$.

Теорема 16. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и точка ∞ является*

(i) устранимой особой точкой функции $R_\mu(\vec{B})$. Тогда оператор A не имеет $\vec{B}$-присоединенных векторов высоты $q > n - 1$, $\ker A = \mathfrak{U}^0, \mathrm{im} A = \mathfrak{F}^1$.

(ii) полюсом порядка $p \in \mathbb{N}$ функции $R_\mu^A(\vec{B})$. Тогда длина любой цепочки $\vec{B}$-присоединенных векторов оператора A ограничена числом $p + n - 1$ (цепочки длины $p + n - 1$ при этом существуют), и $\vec{B}$-корневой линеал оператора A совпадает с подпространством $\mathfrak{U}^0$.

Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен и выполняется (A). Фиксируем контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ и рассмотрим семейства операторов

$$V_k^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_\mu^A(\vec{B})(\mu^{n-k-1}A - \mu^{n-k-2}B_{n-1} - \ldots - B_{k+1})e^{\mu t}d\mu,\ k = 0, 1, \ldots, n-1,\ t \in \mathbb{R}. \quad (47)$$

Лемма 9. *(i) При любом $k = 0, 1, ..., n-1$ оператор-функция V_k^t является пропагатором уравнения (11).*

(ii) При любом $k = 0, 1, \ldots, n-1$ оператор-функция V_k^t является целой функцией.

(iii)

$$\left.\frac{d^l}{dt^l}V_k^t\right|_{t=0} = \left\{\begin{array}{l} P,\ l = k; \\ \mathbb{O},\ l \neq k; \end{array}\right. \quad \text{при всех } k = 0, 1, \ldots, n-1,\ l = 0, 1, \ldots.$$

Теорема 17. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен и выполняется (A), причем ∞ – полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ его A-резольвенты. Тогда фазовое пространство уравнения (11) совпадает с образом проектора P.*

Перейдем к исследованию задачи Коши (12) неоднородного уравнения (11). Вектор-функцию $u \in C^n((-\tau, \tau); \mathfrak{U})$ назовем решением задачи (11), (12), если она удовлетворяет равенствам (11), (12). Пусть пучок операторов $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен и выполняется условие (A), тогда, в силу теоремы 14, задача (11), (12) распадается на две независимые задачи

$$H_0u^{(n)} = H_{n-1}u^{(n-1)} + H_{n-2}u^{(n-2)} + \ldots + H_1u' + u + (B_0^0)^{-1}f^0, \quad (48)$$
$$u(0) = v_0^0, u'(0) = v_1^0, ..., u^{(n-1)}(0) = v_{n-1}^0.$$

$$w^{(n)} = S_{n-1}w^{(n-1)} + S_{n-2}w^{(n-2)} + \ldots + S_0w + (A^1)^{-1}f^1, \quad (49)$$
$$w(0) = v_0^1, w'(0) = v_1^1, ..., w^{(n-1)}(0) = v_{n-1}^1,$$

где операторы $H_0 = (B_0^0)^{-1}A^0$, $H_1 = (B_0^0)^{-1}B_1^0\ , ..., H_{n-1} = (B_0^0)^{-1}B_{n-1}^0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0)$, $S_0 = (A^1)^{-1}B_0^1$, $S_1 = (A^1)^{-1}B_1^1, ...,\ S_{n-1} = (A^1)^{-1}B_{n-1}^1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1)$; вектор-функции $u = (I-P)v, f^0 = (I-Q)f$, $w = Pu$, $f^1 = Qf$; векторы $v_l^k \in \mathfrak{U}^k$, $\quad k, l = 0, 1, \ldots, n-1$.

Рассмотрим сначала задачу (48). Пусть ∞ – полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ резольвенты $R_\mu^A(\vec{B})$, тогда, в силу определения 15, операторы $K_{p+1}^s \equiv \mathbb{O}\ \forall s$. Пусть $f^0 \in C^{p+n}((-\tau, \tau); \mathfrak{F}^0)$. Тогда вектор-функция

$$u(t) = -\sum_{q=0}^{p} K_q^n(B_0^0)^{-1}\frac{d^q}{dt^q}f^0(t) \quad (50)$$

является решением уравнения (48). Действительно, продифференцируем уравнение (48) $(p-1)$ раз, учитывая, что

$$u^{(k)} = H_0u^{(n+k)} - H_{n-1}u^{((n+k-1)} - \ldots - H_1u^{(k+1)} - (B_0^0)^{-1}\frac{d^k}{dt^k}f^0(t).$$

Получим

$$u(t) = K_p^1u^{(p+n-1)} + K_p^2u^{(p+n-2)} + \ldots + K_p^nu^p - \sum_{q=0}^{p-1} K_q^n(B_0^0)^{-1}\frac{d^q}{dt^q}f^0(t).$$

Продифференцировав последнее равенство по t, учитывая, что операторы $K_{p+1}^s \equiv \mathbb{O}, \forall s$, получим требуемое.

Если

$$v_k^0 = -\sum_{q=0}^{p} K_q^n (B_0^0)^{-1} \frac{d^{q+k}}{dt^{q+k}} f^0(0), \tag{51}$$

то вектор-функция (50) служит решением задачи (48).

Таким образом, доказана

Лемма 10. *Пусть пучок операторов $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и выполнено условие (A), причем ∞ – полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ A-резольвенты пучка $\vec{B}$. Пусть вектор-функция $f^0 \in C^{p+n}((-\tau, \tau); \mathfrak{F}^0)$, а начальные значения $v_k^0 \in \mathfrak{U}^0$ удовлетворяют (51) $k = 0, 1, ..., n-1$. Тогда существует решение $u \in C^n((-\tau, \tau); \mathfrak{U}^0)$ задачи (48), которое можно представить в виде (50).*

Перейдем к задаче (49). Пусть вектор-функция $f^1 \in C([-\tau, \tau]; \mathfrak{F}^1)$, тогда вектор-функция

$$w(t) = \sum_{k=0}^{n-1} V_k^t v_k^1 + \int_0^t V_{n-1}^{t-s} (A^1)^{-1} f^1(s) ds, t \in (-\tau, \tau) \tag{52}$$

будет решением задачи (49).

Лемма 11. *Пусть пучок операторов $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, выполнено (A) и вектор-функция $f^1 \in C((-\tau, \tau); \mathfrak{F}^1)$. Тогда существует решение задачи (49), которое можно представить в виде (52).*

Рассмотрим множества

$$\mathcal{M}_f^k = \{v \in \mathfrak{U} : \ (\mathbb{I} - P)v = -\sum_{l=0}^{p} K_l^n (B_0^0)^{-1} \frac{d^{l+k}}{dt^{l+k}} (\mathbb{I} - Q) f(0)\}, \ k = 0, 1, ..., n-1.$$

Теорема 18. *Пусть пучок операторов $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, выполнено (A), причем ∞ – полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ A-резольвенты пучка $\vec{B}$. Пусть вектор-функция $f : (-\tau, \tau) \to \mathfrak{F}$ такова, что $f^0 \in C^{p+n}((-\tau, \tau); \mathfrak{F}^0)$, и $f^1 \in C((-\tau, \tau); \mathfrak{F}^1)$. Тогда при любых $v_k \in \mathcal{M}_f^k$, $k = 0, 1, ..., n-1$ существует единственное решение задачи (12), (11), которое можно представить в виде $v(t) = u(t) + w(t)$, где $u(t)$ определено формулой (50), а $w(t)$ – формулой (52).*

6. Математическая модель продольных колебаний в конструкции

Проведем редукцию задачи (7) – (9) для уравнений (6) к задаче Коши

$$u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1 \tag{53}$$

для линейного уравнения соболевского типа второго порядка

$$Au'' = B_1 u' + B_0 u. \tag{54}$$

Через $L_2(G)$ обозначим множество

$$L_2(G) = \{g = (g_1, g_2, ..., g_j, ...) : g_j \in L_2(0, l_j)\}.$$

Множество $L_2(G)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$< g, h >= \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} g_j(x) h_j(x) dx.$$

Через $\mathfrak{U}$ обозначим множество $\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, ..., u_j, ...) : u_j \in W_2^1(0, l_j)$, и выполнено условие (8)$\}$. Множество $\mathfrak{U}$ является банаховым пространством с нормой

$$\|u\|^2_{\mathfrak{U}} = \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (u^2_{jx}(x) + u^2_j(x)) dx.$$

В силу теорем вложения Соболева пространство $W_2^1(0, l_j)$ состоит из абсолютно непрерывных функций, а значит, $\mathfrak{U}$ корректно определено, плотно и компактно вложено в $L_2(G)$. Отождествим $L_2(G)$ со своим сопряженным, и через $\mathfrak{F}$ обозначим сопряженное относительно двойственности $< \cdot, \cdot >$ пространство к $\mathfrak{U}$. Очевидно, $\mathfrak{F}$ – банахово пространство, причем вложение $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{F}$ компактно.

Формулой

$$< Du, v >= \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (u_{jx}(x) v_{jx}(x) + a u_j(x) v_j(x)) dx,$$

где $a > 0, u, v \in \mathfrak{U}$, зададим оператор, определенный на пространстве $\mathfrak{U}$. Фиксируем $\alpha, \beta > 0$ и $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}$ и построим операторы

$$A = (\lambda - a)I + D, \; B_1 = \alpha((a - \lambda')I + D), \; B_0 = \beta((a - \lambda'')I + D).$$

Теорема 19. *Операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, причем спектр $\sigma(A)$ оператора A вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$.*

Итак, редукция задачи (6) – (9) к задаче (53) – (54) закончена.

Из теоремы 19 вытекает, что оператор A – фредгольмов, причем $kerA = \{0\}$, если $0 \notin \sigma(A)$.

Лемма 12. *Пусть параметры $\alpha, \lambda, \lambda', \lambda'' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, тогда пучок операторов $\overrightarrow{B}$ полиномиально A-ограничен, причем ∞ является несущественной особой точкой A-резольвенты пучка $\overrightarrow{B}$.*

Замечание 8. Как нетрудно видеть, в случае $0 \in \sigma(A)$ и $\lambda = \lambda' = \lambda''$ пучок операторов $\overrightarrow{B}$ не будет полиномиально A-ограничен.

Замечание 9. В случае $0 \notin \sigma(A)$ или $(0 \in \sigma(A)) \wedge (\lambda = \lambda' \neq \lambda'')$ имеет место выполнение условия

$$\int\limits_\gamma (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} d\mu = 0, \tag{A}$$

где $\gamma = \{|\mu| = r > a\}$, a – константа из определения полиномиальной A-ограниченности. Это условие является необходимым и достаточным при построении фазового пространства. В случае $(0 \in \sigma(A)) \wedge (\lambda \neq \lambda')$

$$\int\limits_\gamma (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} d\mu \neq 0,$$

поэтому он исключается из дальнейших рассмотрений.

Пусть $\{\lambda_k\}$ – собственные значения оператора D, занумерованные по неубыванию с учетом их кратности, а $\{\varphi_k\}$ – соответствующие им ортонормированные в смысле $L_2(G)$ функции. Построим проекторы

$$P = \begin{cases} I, \ 0 \notin \sigma(A); \\ I - \sum\limits_{\lambda_k = \lambda - a} < \cdot, \varphi_k > \varphi_k, \ 0 \in \sigma(A); \end{cases}$$

$$Q = \begin{cases} I, \ 0 \notin \sigma(A); \\ I - \sum\limits_{\lambda_k = \lambda - a} < \cdot, \varphi_k > \varphi_k, \ 0 \in \sigma(A), \end{cases}$$

определенные на пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно, и пропагаторы уравнения (54)

$$V_0^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} (\mu A - B_1) e^{\mu t} d\mu =$$

$$= \sum{}' \left[\frac{\mu_k^1 (\lambda - (a + \lambda_k)) + \alpha(\lambda' - (a + \lambda_k))}{(\lambda - (a + \lambda_k))(\mu_k^1 - \mu_k^2)} e^{\mu_k^1 t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu_k^2 (\lambda - (a + \lambda_k)) + \alpha(\lambda' - (a + \lambda_k))}{(\lambda - (a + \lambda_k))(\mu_k^2 - \mu_k^1)} e^{\mu_k^2 t} \right] < \cdot, \varphi_k > \varphi_k;$$

$$V_1^t(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} A e^{\mu t} d\mu = \sum{}' \frac{e^{\mu_k^1 t} - e^{\mu_k^2 t}}{(\mu_k^1 - \mu_k^2)} < \cdot, \varphi_k > \varphi_k,$$

где $\sigma^A(\vec{B}) = \{\mu_k^{1,2} : k \in \mathbb{N}\}$, а $\mu_k^{1,2}$ – корни уравнения

$$(\lambda - (a + \lambda_k))\mu^2 + \alpha(\lambda' - (a + \lambda_k))\mu + \beta(\lambda'' - (a + \lambda_k)) = 0.$$

Здесь штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых с номерами k такими, что $\lambda = a + \lambda_k$.

Отсюда справедлива

Теорема 20. *Пусть $\alpha, \lambda, \lambda', \lambda'' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и (i) $0 \notin \sigma(A)$. Тогда фазовым пространством уравнений (54) является все пространство $\mathfrak{U}$, т.е. для любых $u_0, u_1 \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение $u \in C^2(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$ задачи (7) – (9) для уравнений (6), которое имеет вид $u(t) = V_0^t u_0 + V_1^t u_1$.*

(ii) $0 \in \sigma(A)$ и $\lambda = \lambda'$, но $\lambda \neq \lambda''$. Тогда фазовым пространством уравнений (6) является подпространство $\mathfrak{U}^1 = \{u \in \mathfrak{U} :< u, \varphi_k >= 0, \text{ при } \lambda_k = \lambda - a\}$, т.е. для любых $u_0, u_1 \in \mathfrak{U}^1$ существует единственное решение $u \in C^2(\mathbb{R}; \mathfrak{U}^1)$ задачи ((7) – (9) для уравнений (6), которое имеет вид $u(t) = V_0^t u_0 + V_1^t u_1$.

Автор выражает свою искреннюю признательность профессору Г.А. Свиридюку за постановку задачи, интерес к работе и предоставленные возможности.

Литература

1. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003. – 179 p.
2. Cristiansen, P.L. On a Toda Lattice Model with a Transversal Degree of Freedom / P.L. Cristiansen, V. Muto, P.S. Lomdahl // Nonlinearity. – 1990. – № 4. – P. 477–501.
3. Boussinesq, J.V. Essai sur la théorie des eaux courantes. – Mém. Pésentés Divers Savants Acad. Sci. Inst. France. – 1877. – № 23. – P. 1–680.

4. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – М.: Физматгиз, 1961. – 204 с.
5. Темам, Р. Уравнения Навье – Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. – М.: Мир, 1981. – 408 с.
6. Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, № 5. – С. 852–864.
7. Chen, P.J. On a Theory of Heat Conduction Involving Two Temperatures / P.J. Chen, M.E. Gurtin // Z. Angew. Math. Phys. – 1968. – V. 19. – P. 614–627.
8. Осколков, А.П. Нелокальные проблемы для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л. Соболева / Осколков А.П. // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1991. – Т. 198. – С. 31–48.
9. Poincaré, H. Sur l'equilibre d'une mass fluide animée d'un mouvement de rotation / H. Poincaré // Acta Math. – 1885. – V. 7. – P. 259–380.
10. Соболев, С.Л. Об одной новой задаче математической физики / С.Л. Соболев // Изв. АН СССР, серия «Математика». – 1954. – Т. 18, вып. 1. – С. 3–50.
11. Demidenko, G.V. Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest Order Derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. – N.Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003. – 632 p.
12. Showalter, R.E. Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations / R.E. Showalter. – Pitman; London; San Francisco; Melbourne, 1977.
13. Favini A. Degenerate Differential Equations in Banach Spaces / A. Favini, A. Yagi. – N.Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 1999. – 336 p.
14. Lyapunov–Shmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinithyn, M. Falaleev. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 548 p.
15. Al'shin, A.B. Blow-up in Nonlinear Sobolev Type Equations / A.B. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov. – Series in nonlinear analisys and applications, 15, De Gruyter, 2011.
16. Кожанов, А.И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка / А.И. Кожанов. – Новосибирск: НГУ, 1990. – 130 с.
17. Pyatkov, S.G. Operator Theory. Nonclassical Problems / S.G. Pyatkov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2002. – 348 p.
18. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа высокого порядка / Г.А. Свиридюк, А.А. Замышляева // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 2. – С. 252–260.
19. Замышляева, А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка / А.А. Замышляева // Вычислительные технологии. – 2003. – Т. 8, № 4. – С. 45–54.
20. Замышляева, А.А. Фазовое пространство уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2011. – Т. 4, № 4. – С. 45–57.
21. Габов, С.А. Новые задачи математической теории волн / С.А. Габов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1998. – 448 с.
22. Benney, D.J. Interactions of Permanent Waves of Finite Amplitude / D.J. Benney, J.C. Luke // J. Math. Phys. – 1964. – № 43. – P. 309–313.

23. Ляв, А. Математическая теория упругости /А. Ляв; пер. с англ. Б.В. Булгаков, В.Я. Натанзон. – М.; Л.: ОНТИ, 1935. – 674 с.
24. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 104–125.
25. Загребина, С.А. Начально-конечная задача для уравнений соболевского типа с сильно (L, p)-радиальным оператором / С.А. Загребина // Математические заметки ЯГУ. – 2012. – Т. 19, № 2. – С. 39–48.
26. Свиридюк, Г.А. Уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной на графе / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Вестник МаГУ. Серия: Математика. – Магнитогорск, 2003. – Вып. 4. – С. 129–139.
27. Свиридюк, Г.А. Об одной модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости / Г.А. Свиридюк // Известия вузов. Математика. – 1994. – № 1. – С. 62–70.
28. Свиридюк, Г. А. Фазовое пространство задачи Коши – Дирихле для одного неклассического уравнения / Г.А. Свиридюк, А.В. Анкудинов // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39, № 11. – С. 1556–1561.
29. Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка: моногр. / А.А. Замышляева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.
30. Сагадеева, М.А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа: моногр. / М.А. Сагадеева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.
31. Замышляева, А.А. Оптимальное управление решениями задачи Шоуолтера – Сидорова – Дирихле для уравнения Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49. – № 11. – С. 1390–1398.
32. Манакова, Н.А. Задачи оптимального управления для уравнений соболевского типа: моногр. / Н.А. Манакова. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 88 с.
33. Келлер, А.В. Задача оптимального измерения: численное решение, алгоритм программы / Келлер А.В., Назарова Е.И. // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2011. – № 3. – С. 74–82.
34. Свиридюк, Г.А. Численное решение систем уравнений леонтьевского типа / Г.А. Свиридюк, С.В. Брычев // Известия вузов. Математика. – 2003. – № 8. – С. 46–52.
35. Свиридюк, Г.А. Алгоритм решения задачи Коши для вырожденных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / Г.А. Свиридюк, И.В. Бурлачко // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2003. – Т. 43, № 11. – С. 1677–1683.
36. Шестаков, А.Л. Динамические измерения как задача оптимального управления // А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк, Е.В. Захарова / Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2009. – Т. 16, № 4. – С. 732.
37. Шестаков, А.Л. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 107–115.
38. Замышляева, А.А. О численном исследовании математической модели распространения волн на мелкой воде / А.А. Замышляева, Е.В. Бычков // Математические заметки ЯГУ. – 2013. – Т. 20, № 1. – С. 27–34.
39. Замышляева, А.А. Об алгоритме численного моделирования волн Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2013. – Т. 13, № 4. – С. 24–29.

40. Замышляева, А.А. Аналитическое исследование математической модели Буссинеска – Лява с аддитивным белым шумом / А.А. Замышляева // Глобальный научный потенциал (Раздел математические методы и модели). – 2013. – № 7 (28). – С. 44–50.
41. Замышляева, А.А. Стохастическая математическая модель ионно-звуковых волн в плазме / А.А. Замышляева // Естественные и технические науки (Раздел математическое моделирование, численные методы и комплексы программ). – 2013. – № 4. – С. 284–292.
42. Замышляева, А.А. Уравнение de Gennes звуковых волн в смектиках / А.А. Замышляева // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2009. – Т. 16, вып. 4. – С. 655–656.
43. Замышляева, А.А. Об аналитическом исследовании линеаризованной математической модели Бенни – Люка / А.А. Замышляева // Математические заметки ЯГУ. – 2013. – Т. 20, № 2. – С. 57–65.
44. Замышляева, А.А. Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска – Лява на графе / А.А. Замышляева, А.В. Юзеева // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 2. – С. 18–29.
45. Федоров, В.Е. О некоторых соотношениях в теории вырожденных полугрупп операторов // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2008. – №15 (115), вып. 1. – С. 89–99.

Алена Александровна Замышляева, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), alzama@mail.ru.

Поступила в редакцию 12 февраля 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University.
Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software",
2014, vol. 7, no. 2, pp. 5–28.

MSC 35K70, 60H30 **DOI: 10.14529/mmp140201**

The Higher-Order Sobolev-Type Models

A.A. Zamyshlyaeva, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, alzama@mail.ru

This paper surveys the author's results concerning mathematical models based on Sobolev equations of higher order. The theory is built using the available facts on the solvability of initial (initial-final) problems for first-order Sobolev-type equations. The main idea is a generalization of the theory of degenerate (semi)groups of operators to the case of higher-order equations: decomposition of spaces and actions of the operators, construction of propagators and the phase space for the homogeneous equation, as well as the set of valid initial values for the inhomogeneous equation. We use the phase space method, which is quite useful for solving Sobolev-type equations and consists in a reduction of a singular equation to a regular one defined on a certain subspace of the original space. We reduce mathematical models to initial (initial-final) problems for abstract Sobolev-type equations of higher order. The results may find further applications in the study of optimal control problems and nonlinear mathematical models, and to the construction of the theory of Sobolev-type equations of higher order in quasi-Banach spaces.

Keywords: Sobolev-type equations; phase space; propagators; initial-final problem; relative spectrum.

References

1. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*. Utrecht, Boston, Köln, Tokyo, VSP, 2003. DOI: 10.1515/9783110915501
2. Cristiansen P.L., Muto V., Lomdahl P.S. On a Toda Lattice Model with a Transversal Degree of Freedom. *Nonlinearity*, 1990, no. 4, pp. 477–501.
3. Boussinesq J.V. Essai sur la théorie des eaux courantes. *Mém. Pésentés Divers Savants Acad. Sci. Inst. France,* 1877, no. 23, pp. 1–680.
4. Ladyzhenskaya O.A. *Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkouprugoy neszhimaemoy zhidkosti* [Mathematical Problems in the Dynamics of a Viscoelastic Incompressible Fluid]. Moscow, Fizmatgiz, 1961.
5. Temam R. *Navier – Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis.* Amsterdam, N.-Y., Oxford, North Holland Publ. Co., 1979.
6. Barenblatt G.I., Zheltov Yu.P., Kochina I.N. Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Fluids in Fissurized Rocks. *J. Applied Mathematics and Mechanics (PMM),* 1960, vol. 24, no. 4, pp. 1268–1303.
7. Chen P.J., Gurtin M.E. On a Theory of Heat Conduction Involving Two Temperatures. *Z. Angew. Math. Phys.,* 1968, vol. 19, pp. 614–627. DOI: 10.1007/BF01594969
8. Oskolkov A.P. Nonlocal Problems for One Class of Nonlinear Operator Equations that Arise in the Theory of Sobolev Type Equations. *Journal of Mathematical Sciences*, Nauka, St. Petersburg, 1993, vol. 64, issue 1 pp. 724–736.
9. Poincaré H. Sur l'equilibre d'une mass fluide animée d'un mouvement de rotation. *Acta Math.,* 1885, vol. 7, pp. 259–380. DOI: 10.1007/BF02402204
10. Sobolev S.L. [On a New Problem of Mathematical Physics]. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk, Seriya Matematicheskaya*, 1954, vol. 18, issue 1, pp. 3–50. (in Russian)
11. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest Order Derivative.* N.Y., Basel, Hong Kong, Marcel Dekker, Inc., 2003.
12. Showalter R.E. *Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations.* Pitman, London, San Francisco, Melbourne, 1977.
13. Favini A., Yagi A. *Degenerate Differential Equations in Banach Spaces.* N.Y., Basel, Hong Kong, Marcel Dekker, Inc., 1999.
14. Sidorov N., Loginov B., Sinithyn A., Falaleev M. *Lyapunov – Shmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications.* Dordrecht, Boston, London, Kluwer Academic Publishers, 2002. DOI: 10.1007/978-94-017-2122-6
15. Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. *Blow-up in Nonlinear Sobolev Type Equations.* Series in Nonlinear Analisys and Applications, 15, De Gruyter, 2011. DOI: 10.1515/9783110255294
16. Kozanov A.I. *Kraevye zadachi dlya uravneniy matematicheskoy fiziki nechetnogo poryadka* [Boundary Value Problems for Equations of Mathematical Physics Odd Order]. Novosibirsk, NSU, 1990.
17. Pyatkov S.G. *Operator Theory. Nonclassical Problems.* Utrecht, Boston, Köln, Tokyo, VSP, 2002. DOI: 10.1515/9783110900163
18. Sviridyuk G.A., Zamyshlyaeva A.A. The Phase Spaces of a Class of Linear Higher-Order Sobolev Type Equations. *Differential Equations,* 2006, vol. 42, no. 2, pp. 269–278. DOI: 10.1134/S0012266106020145

19. Zamyshlyaeva A.A. [Phase Spaces of Class Linear Equations of Second Order Sobolev Type]. *Vychislitel'nye tekhnologii* [Computational Technologies], 2003, vol. 8, no. 4, pp. 45–54. (in Russian)
20. Zamyshlyaeva A.A. [The Phase Space of Sobolev Type Equations of High Order]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Matematika"* [The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics"], 2011, vol. 4, no. 4, pp. 45–57. (in Russian)
21. Gabov S.A. *Novye zadachi matematicheskoy teorii voln* [New Problems of Mathematical Theory of Waves]. Moscow, FIZMATLIT, 1998.
22. Benney D.J., Luke J.C. Interactions of Permanent Waves of Finite Amplitude. *J. Math. Phys.,* 1964, no. 43, pp. 309–313.
23. Love A.E.H. *A Treatise on the mat Ematical Theory of Elasticity.* Cambridge, at the university press, 1927.
24. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. [The Showalter – Sidorov Problem as a Phenomena of the Sobolev Type Equations]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Matematika"* [The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics"], 2010, vol. 3, no. 1, pp. 104–125. (in Russian)
25. Zagrebina S.A. [Initial-Final Problems for Sobolev Type Equations with Strongly (L, p)-Radial Operator]. *Mathematical Notes of YSU*, 2012, vol. 19, no. 2, pp. 39–48. (in Russian)
26. Sviridyuk G.A., Shemetova V.V. [Barenblatt – Jeltov – Cochina Equations on the Graph]. *Vestnik Magnitogorskogo gosudarstvennogo universiteta. Seria "Matematika",* [Bulletin of Magnitogorsk State University. Series "Mathematics"], 2003, issue 4, pp. 129–139. (in Russian)
27. Sviridyuk G.A. On a Model of the Dynamics of a Weakly Compressible Viscoelastic Fluid. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1994, vol. 38, no. 1, pp. 59–68.
28. Sviridyuk G.A., Ankudinov A.V. The Phase Space of the Cauchy – Dirichlet Problem for a Nonclassical Equation. *Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 11, pp. 1639–1644. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000019357.68736.15
29. Zamyshlyaeva A.A. *Linear Sobolev Type Equations of High Order.* Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2012. (in Russian)
30. Sagadeeva M.A. *Dichotomy of Solutions of Linear Sobolev Type Equations.* Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2012. (in Russian)
31. Zamyshlyaeva A.A., Tsyplenkova O.N. Optimal Control of Solutions of the Showalter – Sidorov – Dirichlet Problem for the Boussinesq – Love Equation. *Differential Equations,* 2013, vol. 49, no. 11, pp. 1356–1365. DOI: 10.1134/S0012266113110049
32. Manakova N.A. *Optimal Control Problem for the Sobolev Type Equations.* Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2012. (in Russian)
33. Keller A.V., Nazarova E.I. [Optimal Measurement Problem: Numerical Solution, Algorithm of the Program]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Matematika"* [The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics"], 2011, no. 3, pp. 74–82. (in Russian)
34. Sviridyuk G.A., Brychev S.V. Numerical Solution of Systems of Equations of Leontief Type. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2003, vol. 47, no. 8, pp. 44–50.
35. Sviridyuk G.A., Burlachko I.V. An Algorithm for Solving of the Cauchy Problem for Degenerate Linear Systems of Ordinary Differential Equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2003, vol. 43, no. 11, pp. 1613–1619.

36. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Zakharova E.V. [Dynamical Measurements as an Optimal Control Problem]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki*, 2009, vol. 16, no. 4, pp. 732. (in Russian)
37. Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. Numerical Solution of the Optimal Measurement Problem. *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 1, pp. 97–104. DOI: 10.1134/S0005117912010079
38. Zamyshlyaeva A.A., Bychkov E.V. [Numerical Study of the Mathematical Model of Shallow Water Wave Propagation]. *Mathematical Notes of YSU*, 2013, vol. 20, no. 1, pp. 27–34. (in Russian)
39. Zamyshlyaeva A.A. [An Algorithm for the Numerical Modelling of the Boussinesq – Love Waves]. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Computer Technologies, Automatic Control, Radioelectronics"*, 2013, vol. 13, no. 4, pp. 24–29. (in Russian)
40. Zamyshlyaeva A.A. [Analytical Study of the Boussinesq – Love Mathematical Model with Additive White Noise]. *Global'nyy nauchnyy potentsial (Razdel matematicheskie metody i modeli)* [Global Scientific Resources (Section Mathematical Methods and Models)], 2013, no. 7 (28), pp. 44–50. (in Russian)
41. Zamyshlyaeva A.A. [Stochastic Mathematical Model of Ion-Acoustic Waves in Plasma]. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki (Razdel matematicheskoe modelirovanie, chislennye metody i kompleksy programm)* [Natural and Technical Sciences (Section Mathematical Modelling, Numerical Methods and Complexes of Programs], 2013, no. 4, pp. 284–292. (in Russian)
42. Zamyshlyaeva A.A. [De Gennes Equation of Sound Waves in Smectic]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki*, 2009, vol. 16, issue 4, pp. 655–656. (in Russian)
43. Zamyshlyaeva A.A. [An Analytical Study of the Linearized Benny – Luke Mathematical Model]. *Mathematical Notes of YSU*, 2013, vol. 20, no. 2, pp. 57–65. (in Russian)
44. Zamyshlyaeva A.A., Yuzeeva A.V. [Initial-Final Problem for the Boussinesq – Love Equation on a Graph]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Matematika"* [The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics"], 2010, vol. 3, no. 2, pp. 18–29. (in Russian)
45. Fedorov V.E [About Some Relations in the Theory of Degenerate Operator Semigroups]. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2008, no. 15 (115), issue 7, pp. 89–99. (in Russian)

Received February 12, 2014