УДК 519.6 DOI: 10.14529/mmp180207

ОПТИМИЗАЦИЯ ТОЧКИ СТАРТА В ЗАДАЧЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ОБХОДА МЕГАПОЛИСОВ ПРИ НАЛИЧИИ УСЛОВИЙ ПРЕДШЕСТВОВАНИЯ

А.Г. Ченцов[1,2]***, П.А. Ченцов***[1,2]
[1]Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург, Российская Федерация
[2]Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация

Рассматривается задача маршрутизации перемещений с ограничениями и функциями стоимости, допускающими зависимость от списка заданий. Предполагается, что начальное условие процесса с дискретным временем может выбираться в пределах метрического пространства, удовлетворяющего условию полной ограниченности. По постановке задачи предполагается посещение конечной системы мегаполисов (непустых конечных множеств) с выполнением тех или иных работ, стоимости которых зависят всякий раз от пункта прибытия и пункта отправления. Стоимости перемещений и выполняемых работ агрегируются аддитивно. Для решения используется вариант широко понимаемого динамического программирования, обеспечивающий нахождение ε-оптимального решения при любом значении $\varepsilon > 0$.

Ключевые слова: маршрутная задача; ограничения; точка старта.

Введение

Рассматривается задача об организации системы перемещений с целью последовательного посещения системы конечных множеств, включая выбор начального состояния. Исследуется случай, когда система перемещений оценивается аддитивным критерием. Особенностью данного исследования является проблема оптимизации начального состояния без непосредственного построения начального решения, т.е. проблема нахождения экстремума. Значение последнего может оказаться полезным на этапе сравнения эвристик в задачах большой размерности. Разумеется, используемую при этом процедуру на основе динамического программирования (ДП) можно использовать и для нахождения всего оптимального процесса (включая выбор начального состояния) с любой степенью точности. В этом случае предъявляются более жесткие требования к памяти вычислителя, поскольку приходится сохранять все слои функции Беллмана, в то время как при определении только экстремума и его распределения на множестве начальных состояний достаточно использовать перезапись упомянутых слоев, что приводит к меньшей загрузке памяти.

Задачи маршрутизации находят широкие применения в инженерных исследованиях. Отметим транспортные задачи, задачи управления инструментом при листовой резке на машинах с ЧПУ, задачи о снижении дозовой нагрузки персонала АЭС при выполнении комплекса работ в условиях повышенной радиации, задачи авиапожарного патрулирования. Хотя прототипом упомянутых задач маршрутизации является известная труднорешаемая задача коммивояжера (ЗК) [1–5], здесь возникает целый ряд особенностей не только количественного, но и качественного характера: появляются ограничения, усложненные функции стоимости и др. Представляется, что разработка методов решения упомянутых прикладных задач, связанных с маршрутизацией, требует разработки специальной математической теории. В связи с этим направлением сейчас отметим [6–9], где последовательно разрабатывался вариант широко понимаемого метода динамического программирования (ДП); в связи с разработкой аппарата ДП для решения ЗК отметим [10, 11] (используемая в [6–9] схема решения на основе ДП допускает идейную аналогию с [10]). Среди других подходов к решению ЗК особо отметим метод ветвей и границ [12].

В настоящей работе конструкция [6–8], использующая ДП, переносится на постановку, в которой требуется еще оптимизировать начальное состояние. Последнее можно выбирать в пределах непустого и не обязательно конечного множества, на котором задана метрика. Мы полагаем получающееся метрическое пространство вполне ограниченным (если исходное множество содержится в конечномерном арифметическом пространстве, то достаточна ограниченность). При этом ориентируемся на реализацию глобального экстремума с высокой, но все же конечной степенью точности. Такой подход является естественным, поскольку исследуемая задача последовательного обхода мегаполисов является переборной, а потому дискретизация множества начальных состояний также представляется логичной и укладывающейся в общую схему решения подобных задач, связанных с дискретной оптимизацией. Сам же вариант упомянутой дискретизации непосредственно связывается со свойствами сечения функции, определяющей стоимость внешних перемещений. Все налагаемые условия выполнены в случае метрической задачи; задачи такого рода широко используются в дискретной оптимизации (имеются в виду постановки, в которых стоимости перемещений оцениваются расстояниями).

1. Общие понятия и обозначения

Используем обычную теоретико-множественную символику (кванторы, связки и др.); через $\emptyset$ обозначаем пустое множество, def заменяет фразу «по определению», $\triangleq$ – равенство по определнию. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Если x и y – объекты, то $\{x; y\}$ есть def множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов. С учетом этого получаем, что для произвольного объекта z в виде $\{z\} \triangleq \{z; z\}$ реализуется синглетон, содержащий $z : z \in \{z\}$. Множества являются объектами, а потому для произвольных двух объектов u и v определена [13, с. 67] упорядоченная пара (УП) $(u, v) \triangleq \{\{u\}; \{u; v\}\}$ с первым элементом u и вторым элементом v. Для произвольной УП z через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ обозначаем первый и второй элементы z соответственно; объекты $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ при этом однозначно определены условием $z = (\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z))$. Если же a, b и c – объекты, то $(a, b, c) \triangleq ((a, b), c)$ есть [14, с. 17] триплет с первым элементом a, вторым элементом b и третьим элементом c. В этой связи напомним, что [14, с. 17] для любых трех множеств A, B и C $\quad A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$ (данное толкование существенно в последующих построениях).

Если P и Q – непустые множества, то [13, с. 77] через Q^P обозначаем непустое множество всех отображений, действующих из P в Q; тогда $(\mathrm{Bi})[P; Q], (\mathrm{Bi})[P; Q] \subset Q^P$, есть def множество всех биекций P на Q. Если же H – непустое множество, то элементы множества $(\mathrm{Bi})[H; H]$ называем [15, с. 87] перестановками множества H;

если при этом $\alpha \in (\mathrm{Bi})[H; H]$, то определена перестановка $\alpha^{-1} \in (\mathrm{Bi})[H; H]$, обратная к α:

$$\alpha(\alpha^{-1}(h)) = \alpha^{-1}(\alpha(h)) = h \quad \forall h \in H.$$

Используя вышеупомянутое толкование триплетов, заметим, что для любых непустых множеств A, B, C и D, отображения $\phi \in D^{A\times B\times C}$, УП $\mu \in A \times B$ и точки $\nu \in C$ определен элемент $\phi(\mu, \nu) \in D$, для которого используем также обозначение $\phi(\mu_1, \mu_2, \nu)$, где $\mu_1 \triangleq \mathrm{pr}_1(z)$ и $\mu_2 \triangleq \mathrm{pr}_2(z)$.

Если Z – множество, то через $\mathcal{P}(Z)$ обозначаем семейство всех подмножеств (п/м) Z; полагаем, что $\mathcal{P}'(Z) \triangleq \mathcal{P}(Z) \setminus \{\emptyset\}$ (семейство всех непустых п/м Z) и $\mathrm{Fin}(Z)$ – семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(Z)$, т.е. семейство всех непустых конечных п/м Z. Если же Z – непустое конечное множество, то $\mathrm{Fin}(Z) = \mathcal{P}'(Z)$. Если P и Q – непустые множества, $h \in Q^P$ и $S \in \mathcal{P}(P)$, то $h^1(S) \triangleq \{h(s) : s \in S\} \in \mathcal{P}(Q)$ есть образ множества S при действии h.

В дальнейшем $\mathbb{R}$ – вещественная прямая, $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \xi\}$, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; ...\}$ и $\mathbb{N}_0 \triangleq \mathbb{N} \bigcup \{0\} = \{0; 1; 2; ...\}$; при $p \in \mathbb{N}_0$ и $q \in \mathbb{N}_0$

$$\overline{p, q} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 \mid (p \leq k)\&(k \leq q)\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$$

(случай $\overline{p, q} = \emptyset$ не исключается; в частности, $\overline{1, 0} = \emptyset$). Если K – непустое конечное множество (в частности, если $K \in \mathrm{Fin}(S)$, где S – непустое множество), то $|K| \in \mathbb{N}$ есть def мощность (количество элементов) K, а $(\mathrm{bi})[K]$ есть def множество всех биекций «промежутка» $\overline{1, |K|}$ на K, $(\mathrm{bi})[K] \neq \emptyset$. При $m \in \mathbb{N}$ имеем равенство $(\mathrm{bi})[\overline{1, m}] = (\mathrm{Bi})[\overline{1, m}; \overline{1, m}]$. Полагаем, как обычно, $|\emptyset| \triangleq 0$.

Если S – непустое множество, то через $\mathcal{R}_+[S]$ обозначаем множество всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) функций на S, т.е. $\mathcal{R}_+[S] \triangleq (\mathbb{R}_+)^S$.

2. Основная задача

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество X, а также его п/м $X^0 \in \mathcal{P}'(X)$. Мы полагаем, что на X^0 задана метрика [16] $\rho \in \mathcal{R}_+[X^0 \times X^0]$ (отметим естественный вариант: метрикой оснащено X, а ρ есть ее сужение на X^0, а, точнее, на $X^0 \times X^0$), превращающая X^0 в метрическое пространство (X^0, ρ). Пусть

$$B^0_\rho(x, \varepsilon) \triangleq \{y \in X^0 \mid \rho(x, y) < \varepsilon\} \;\; \forall x \in X^0 \; \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$$

(введены открытые шары в X^0, радиусы которых строго положительны). Постулируем, что (X^0, ρ) есть вполне ограниченное пространство, т.е.

$$\forall \varepsilon \in]0, \infty[\;\; \exists K \in \mathrm{Fin}(X^0) : X^0 = \bigcup_{x \in K} B^0_\rho(x, \varepsilon) \tag{1}$$

(данное условие (1) выполняется для ограниченных множеств в конечномерных арифметических пространствах). Элементы X^0 рассматриваем в качестве возможных начальных состояний для процессов, связанных с рассматриваемыми ниже задачами маршрутизации.

Пусть $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, заданы (непустые конечные) множества

$$M_1 \in \mathrm{Fin}(X), ..., M_N \in \mathrm{Fin}(X), \tag{2}$$

а также связанные с ними непустые отношения

$$\mathbb{M}_1 \in \mathcal{P}'(M_1 \times M_1), ..., \mathbb{M}_N \in \mathcal{P}'(M_N \times M_N). \tag{3}$$

Множества (2) именуем мегаполисами, подлежащими посещению. Каждое такое посещение сопровождается выполнением работ, именуемых далее внутренними (сами перемещения между мегаполисами, а также из точек множества X^0 к мегаполисам, именуем внешними). В дальнейшем предполагается, что

$$(X^0 \bigcap M_j = \emptyset \ \ \forall j \in \overline{1,N})\&(M_p \bigcap M_q = \emptyset \ \ \forall p \in \overline{1,N} \ \forall q \in \overline{1,N} \setminus \{p\}). \tag{4}$$

Условия (4) типичны для рассматриваемой ниже задачи; УП из множества $\mathbb{M}_j$, где $j \in \overline{1,N}$, определяют возможные варианты выполнения внутренних работ при посещении M_j. Предметом нашего рассмотрения являются процессы следующего типа

$$(x \in X^0) \longrightarrow (x_1^{(1)} \in M_{\alpha(1)} \rightsquigarrow x_2^{(1)} \in M_{\alpha(1)}) \longrightarrow ... \longrightarrow (x_1^{(N)} \in M_{\alpha(N)} \rightsquigarrow x_2^{(N)} \in M_{\alpha(N)}),$$

$$(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \in M_{\alpha(1)}, ..., (x_1^{(N)}, x_2^{(N)}) \in M_{\alpha(N)}, \tag{5}$$

где α – перестановка индексов из $\overline{1,N}$. В (5) прямые стрелки соответствуют внешним перемещениям, а волнистые – перемещениям при выполнении внутренних работ. Выбор α может быть стеснен условиями предшестования, для формулировки которых введем множество $\mathbf{K} \in \mathcal{P}(\overline{1,N} \times \overline{1,N})$ (случай $\mathbf{K} = \emptyset$ не исключается и соответствует отсутствию ограничений в виде условий предшествования); УП из $\mathbf{K}$ именуем адресными парами. Всюду в дальнейшем предполагается, что

$$\forall \mathbf{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}) \ \ \exists z_0 \in \mathbf{K}_0 : \mathrm{pr}_1(z_0) \neq \mathrm{pr}_2(z) \ \ \forall z \in \mathbf{K}_0 \tag{6}$$

(в [17, часть 2] указаны конкретные классы задач, удовлетворяющие (6)). Ограничение, налагаемое на выбор α, имеет следующий смысл: при $z = (i,j) \in \mathbf{K}$ посещение M_i должно предшествовать посещению M_j. С учетом этого в виде

$$\mathbf{A} \stackrel{\triangle}{=} \{\alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z)) \ \forall z \in \mathbf{K}\},$$

где $\mathbb{P} \stackrel{\triangle}{=} (\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$, имеем множество всех допустимых по предшествованию перестановок индексов из $\overline{1,N}$. При этом (см. (6); [17, (2.2.53)]) $\mathbf{A} \neq \emptyset$, т.е. $\mathbf{A} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P})$. Элементы $\mathbf{A}$ называем допустимыми маршрутами. Как видно из (5), выбор маршрута, т.е. перестановки индексов, не определяет еще конкретной реализации процесса. Следуя [17, часть 2], введем далее трассы, полагая при этом, что $\forall j \in \overline{1,N}$

$$(\mathfrak{M}_j \stackrel{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_1(z) : z \in \mathbb{M}_j\})\&(\mathbf{M}_j \stackrel{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_2(z) : z \in \mathbb{M}_j\}). \tag{7}$$

Ясно, что каждое из множеств (7) непусто и содержится в M_j. Полагаем далее

$$(\mathbf{X} \stackrel{\triangle}{=} (\bigcup_{j=1}^{N} \mathbf{M}_j) \bigcup X^0)\&(\tilde{\mathbb{X}} \stackrel{\triangle}{=} (\bigcup_{i=1}^{N} \mathfrak{M}_i) \bigcup X^0), \tag{8}$$

получая множества из $\mathcal{P}'(X)$ (см. (2), (3)). Через $\mathbb{Z}$ обозначаем сейчас множества всех отображений
$$(z_t)_{t\in\overline{0,N}} : \overline{0,N} \longrightarrow \tilde{\mathbb{X}} \times \mathbf{X}.$$
Если $x \in X^0$ и $\alpha \in \mathbb{P}$, то в виде

$$\mathcal{Z}_\alpha[x] \stackrel{\triangle}{=} \{(z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathbb{Z} \mid (z_0 = (x,x))\&(z_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)}\ \forall t \in \overline{1,N})\} \in \mathrm{Fin}(\mathbb{Z}) \qquad (9)$$

имеем множество всех трасс, согласованных с маршрутом α и стартующих из точки x. С учетом (7) – (9) получаем, что при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathbb{P}$, $(z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha[x]$ и $\tau \in \overline{0,N}$ $(\mathrm{pr}_1(z_\tau) \in \tilde{\mathbb{X}})\&(\mathrm{pr}_2(z_\tau) \in \mathbf{X})$. Введем, кроме того, $\mathbb{X} \stackrel{\triangle}{=} \tilde{\mathbb{X}} \bigcup \mathbf{X} \in \mathcal{P}'(X)$; все траектории из множества (9) развиваются в $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ и соответствуют схеме (5). Пусть

$$\tilde{\mathbf{D}}[x] \stackrel{\triangle}{=} \{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{A} \times \mathbb{Z} \mid \mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\alpha[x]\}\ \ \forall x \in X^0; \qquad (10)$$

в (10) введены множества допустимых решений (ДР) задачи последовательного обхода мегаполисов с фиксированным начальным условием (н.у.). Кроме того, пусть

$$\mathbf{D} \stackrel{\triangle}{=} \{(\alpha, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{A} \times \mathbb{Z} \times X^0 \mid (\alpha, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]\}$$

(введено множество ДР полной задачи). Пусть $\mathfrak{N} \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{P}'(\overline{1,N})$; множества из $\mathfrak{N}$ именуем списками заданий.

Фиксируем функции $\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \tilde{\mathbb{X}} \times \mathfrak{N}]$, $c_1 \in \mathcal{R}_+[\tilde{\mathbb{X}} \times \mathbf{X} \times \mathfrak{N}]$,... ,$c_N \in \mathcal{R}_+[\tilde{\mathbb{X}} \times \mathbf{X} \times \mathfrak{N}]$, $f \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}]$; кортеж $(\mathbf{c}, c_1, ..., c_N, f)$ будет использоваться для оценивания внешних перемещений, внутренних работ и терминального состояния процесса, на содержательном уровне определяемого в (5). Если $\alpha \in \mathbb{P}$ и $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}$, то полагаем, что

$$\begin{gathered}\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}] \stackrel{\triangle}{=} \sum_{s=1}^{N} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(s-1)), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(s)), \alpha^1(\overline{s,N}))+ \\ +c_{\alpha(s)}(\mathbf{z}(s), \alpha^1(\overline{s,N}))] + f(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(N))).\end{gathered} \qquad (11)$$

Посредством (11) определяем критерии рассматриваемых ниже задач: полагаем $\alpha \in \mathbf{A}$ и $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\alpha[x]$, где $x \in X^0$. Так, следуя [6–8], при $x \in X^0$ рассматриваем задачу

$$\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}] \longrightarrow \min,\ (\alpha, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x], \qquad (12)$$

которой сопоставляем экстремум (значение) $V[x] \in \mathbb{R}_+$ в виде наименьшего из значений $\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}], (\alpha, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]$ и множество

$$(\mathrm{SOL})[x] \stackrel{\triangle}{=} \{(\alpha_0, \mathbf{z}_0) \in \tilde{\mathbf{D}}[x] \mid \mathfrak{C}_{\alpha_0}[\mathbf{z}_0] = V[x]\} \in \mathrm{Fin}(\tilde{\mathbf{D}}[x]) \qquad (13)$$

всех оптимальных решений задачи (12). Кроме того, имеем (полную) экстремальную задачу
$$\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}] \longrightarrow \inf,\ \ (\alpha, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{D}, \qquad (14)$$
для которой соответствующим значением является величина

$$\mathbb{V} \stackrel{\triangle}{=} \inf_{(\alpha,\mathbf{z},x)\in\mathbf{D}} \mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}] = \inf_{x\in X^0} V[x] \in \mathbb{R}_+; \qquad (15)$$

мнинимум в (15) может не достигаться, т.к. множество X^0 не предполагалось конечным. В связи с (15) рассмотрим также задачу оптимизации н.у.:

$$V[x] \longrightarrow \inf, \quad x \in X^0. \tag{16}$$

Мы ставим своей целью достижение $\mathbb{V}$ (15) с любой наперед заданной степенью точности. В этой связи будем предполагать в дальнейшем, что функция $\mathbf{c}$ удовлетворяет условию равномерной непрерывности некоторых своих сечений, причем данная равномерная непрерывность будет предполагаться еще и равностепенной по набору параметров. Итак, полагаем в дальнейшем, что $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ $\exists \delta \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ $\forall x_1 \in X^0$ $\forall x_2 \in X^0$

$$(\rho(x_1, x_2) < \delta) \Rightarrow (|\mathbf{c}(x_1, y, \overline{1,N}) - \mathbf{c}(x_2, y, \overline{1,N})| < \varepsilon \;\; \forall y \in \mathbf{X}). \tag{17}$$

Данному предположению можно придать несколько иную форму. Для этого введем при $y \in \mathbf{X}$ функцию

$$\mathbf{c}(\cdot, y, \overline{1,N}) \triangleq (\mathbf{c}(x, y, \overline{1,N}))_{x \in X^0} \in \mathcal{R}_+[X^0].$$

Тогда (17) означает, что семейство функций $\{\mathbf{c}(\cdot, y, \overline{1,N}) : y \in \mathbf{X}\}$ является равностепенно по $y \in \mathbf{X}$ равномерно непрерывным на (X^0, ρ).

Пример 1. Рассмотрим следующий частный случай: множество X оснащено метрикой $d \in \mathcal{R}_+[X \times X]$, а ρ есть сужение d на $X^0 \times X^0$, т.е. $\rho(x_1, x_2) = d(x_1, x_2)$ $\forall x_1 \in X^0$ $\forall x_2 \in X^0$. Функция $\mathbf{c}$ такова, что

$$\mathbf{c}(x, y, \overline{1,N}) = kd(x, y) \;\; \forall x \in X^0 \;\; \forall y \in \mathbf{X},$$

где $k \in \mathbb{R}_+$, $k \neq 0$. Тогда в силу неравенства треугольника при $x' \in X^0$, $x'' \in X^0$ и $y \in \mathbf{X}$

$$\begin{gathered} |\mathbf{c}(x', y, \overline{1,N}) - \mathbf{c}(x'', y, \overline{1,N})| = \\ = k|d(x', y) - d(x'', y)| \leq kd(x', x'') = k\rho(x', x''). \end{gathered} \tag{18}$$

Из (18) следует справедливость свойства (17). Заметим, что данный частный случай реализуется в метрических задачах маршрутизации, играющих важную роль в дискретной оптимизации.

3. Динамическое программирование

Для решения задач (12), (14), (16) предполагается использовать метод ДП. В этой связи коснемся конструкций [6–8], связанных, в частности, с использованием условий предшествования в построениях, связанных с ДП. Введем прежде всего оператор вычеркивания $\mathbf{I}$ [17, часть 2], действующий в $\mathfrak{N}$ по правилу: при $K \in \mathfrak{N}$

$$\mathbf{I}(K) \triangleq K \setminus \{\mathrm{pr}_2(z) : z \in \Xi[K]\}, \tag{19}$$

где $\Xi[K] \triangleq \{z \in \mathbf{K} \mid (\mathrm{pr}_1(z) \in K) \& (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\}$. Пусть, кроме того,

$$\mathfrak{C} \triangleq \{K \in \mathfrak{N} \mid \forall z \in \mathbf{K} \;\; (\mathrm{pr}_1(z) \in K) \Rightarrow (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\} \tag{20}$$

элементы (20) – существенные (для процедуры на основе ДП) списки заданий. С семейством (20) связываем подсемейства

$$\mathfrak{C}_s \triangleq \{K \in \mathfrak{C} \mid s = |K|\} \; \forall s \in \overline{1, N}.$$

Тогда $\mathfrak{C}_N = \{\overline{1, N}\}$ (синглетон, содержащий $\overline{1, N}$) и, кроме того,

$$\mathfrak{C}_{s-1} = \{K \setminus \{t\} : K \in \mathfrak{C}_s, \; t \in \mathbf{I}(K)\} \;\; \forall s \in \overline{2, N}$$

(указана связь с (19)). При этом, в частности, $\mathfrak{C}_1 = \{\{t\} : t \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1\}$, где $\mathbf{K}_1 = \{\mathrm{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}\}$. Введем также

$$\tilde{\mathcal{M}} \triangleq \bigcup_{t \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1} \mathbf{M}_t, D_0 \triangleq \{(x, \emptyset) : x \in \tilde{\mathcal{M}}\} = \tilde{\mathcal{M}} \times \{\emptyset\}$$

(см. (7), (8)). Кроме того, $D_N \triangleq \{(x, \overline{1, N}) : x \in X^0\} = X^0 \times \{\overline{1, N}\}$; D_0 и D_N – крайние слои пространства позиций $\mathbf{X} \times \mathcal{P}(\overline{1, N})$.

Промежуточные слои. Если $s \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathfrak{C}_s$, то последовательно конструируем

$$J_s(K) \triangleq \{j \in \overline{1, N} \setminus K \mid \{j\} \bigcup K \in \mathfrak{C}_{s+1}\}, \mathcal{M}_s[K] \triangleq \bigcup_{j \in J_s(K)} \mathbf{M}_j,$$
$$\mathbb{D}_s[K] \triangleq \{(x, K) : x \in \mathcal{M}_s[K]\} = \mathcal{M}_s[K] \times \{K\}.$$

Тогда определяем при $s \in \overline{1, N-1}$ слой D_s в виде объединения $\mathbb{D}_s[K]$, $K \in \mathfrak{C}_s$, т.е.

$$D_s \triangleq \bigcup_{K \in \mathfrak{C}_s} \mathbb{D}_s[K] \in \mathcal{P}'(\mathbf{X} \times \mathfrak{C}_s). \tag{21}$$

Теперь получены непустые множества $D_0, D_1, ..., D_N$, на которых последовательно определяются в/з функции $v_0 \in \mathcal{R}_+[D_0]$, $v_1 \in \mathcal{R}_+[D_1]$,...,$v_N \in \mathcal{R}_+[D_N]$.

При этом $v_0(x, \emptyset) \triangleq f(x) \;\; \forall x \in \tilde{\mathcal{M}}$. Далее учитываем свойство $(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in D_{s-1} \;\; \forall s \in \overline{1, N} \;\; \forall (x, K) \in D_s \;\; \forall j \in \mathbf{I}(K) \;\; \forall z \in \mathbb{M}_j$. Это свойство позволяет определить преобразование $v_{s-1} \in \mathcal{R}_+[D_{s-1}]$ в $v_s \in \mathcal{R}_+[D_s]$. Итак, если $s \in \overline{1, N}$ и функция $v_{s-1} \in \mathcal{R}_+[D_{s-1}]$ уже построена, то $v_s \in \mathcal{R}_+[D_s]$ определяем условиями: при $(x, K) \in D_s$

$$\begin{aligned} v_s(x, K) \triangleq \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{M}_j} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + \\ + c_j(z, K) + v_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})]. \end{aligned} \tag{22}$$

Получили рекуррентную процедуру $v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow ... \longrightarrow v_N$. При этом $v_N \in \mathcal{R}_+[D_N]$ определяется согласно (22) следующим образом:

$$\begin{aligned} v_N(x, \overline{1, N}) = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1, N}) + \\ c_j(z, \overline{1, N}) + v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\})] \;\; \forall x \in X^0. \end{aligned} \tag{23}$$

Из результатов [7] вытекает, что

$$V[x] = v_N(x, \overline{1, N}) \;\; \forall x \in X^0. \tag{24}$$

Таким образом, решение задачи (16) сводится (см. (24)) к минимизации значений (23). Реально, однако, такое решение может быть найдено с использованием дискретизации X^0 на основе (1). Рассмотрим соответствующую процедуру.

Итак, фиксируем в дальнейшем произвольное (положительное) число $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ в качестве параметра точности. Тогда с учетом (17) подберем $\delta_0 \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ такое, что $\forall x_1 \in X^0\ \forall x_2 \in X^0$

$$(\rho(x_1, x_2) < \delta_0) \Rightarrow (|\mathbf{c}(x_1, y, \overline{1,N}) - \mathbf{c}(x_2, y, \overline{1,N})| < \varepsilon_0 \ \ \forall y \in \mathbf{X}). \tag{25}$$

Теперь, используя (1), подберем $\mathbb{K} \in \mathrm{Fin}(X^0)$ так, что при этом

$$X^0 = \bigcup_{x \in \mathbb{K}} B^0_\rho(x, \delta_0). \tag{26}$$

Мы зафиксируем (непустое конечное) множество $\mathbb{K}$ и рассмотрим зависимость

$$x \mapsto v_N(x, \overline{1,N}) : \mathbb{K} \to \mathbb{R}_+, \tag{27}$$

имея в виду (24).

Предложение 1. *Справедливо неравенство*

$$|\min_{x \in \mathbb{K}} v_N(x, \overline{1,N}) - \mathbb{V}| \le \varepsilon_0. \tag{28}$$

Доказательство практически очевидно (см. (23) – (26)), но все же рассмотрим его схему. Если $\tilde{x} \in X^0$, то для некоторого $x_* \in \mathbb{K}$ имеем в силу (26), что $\tilde{x} \in B^0_\rho(x_*, \delta_0)$. Тогда в силу (25)

$$|\mathbf{c}(\tilde{x}, y, \overline{1,N}) - \mathbf{c}(x_*, y, \overline{1,N})| < \varepsilon_0 \ \ \forall y \in \mathbf{X}. \tag{29}$$

С учетом (8), (19) и (23) получаем

$$v_N(x_*, \overline{1,N}) - \varepsilon_0 < \mathbf{c}(\tilde{x}, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N}) + c_j(z, \overline{1,N}) + v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\})$$
$$\forall j \in \mathbf{I}(\overline{1,N}) \ \ \forall z \in \mathbb{M}_j.$$

Вновь используя (23) получаем, что

$$v_N(x_*, \overline{1,N}) - \varepsilon_0 < v_N(\tilde{x}, \overline{1,N}).$$

Как следствие получаем, что

$$\min_{x \in \mathbb{K}} v_N(x, \overline{1,N}) < v_N(\tilde{x}, \overline{1,N}) + \varepsilon_0. \tag{30}$$

Поскольку $\tilde{x}$ выбиралось произвольно, установлено (см. (30))

$$-\varepsilon_0 + \min_{x \in \mathbb{K}} v_N(x, \overline{1,N}) < v_N(x, \overline{1,N}) \ \ \forall x \in X^0; \tag{31}$$

в свою очередь, из (15), (24) и (31) вытекает, что

$$-\varepsilon_0 + \min_{x \in \mathbb{K}} v_N(x, \overline{1,N}) \le \mathbb{V}.$$

Иными словами, установлено неравенство

$$\min_{x \in \mathbb{K}} v_N(x, \overline{1,N}) - \mathbb{V} \le \varepsilon_0. \tag{32}$$

С другой стороны, по выбору $\mathbb{K}$ имеем из (15), что

$$\mathbb{V} = \inf_{x \in X^0} v_N(x, \overline{1, N}) \leq \min_{x \in \mathbb{K}} v_N(x, \overline{1, N}),$$

а потому с учетом (32) получаем (28). □

Итак, ограничиваясь рассмотрением н.у. $x \in \mathbb{K}$, мы получаем искомый экстремум $\mathbb{V}$ с точностью до ε_0. Данное значение может использоваться в двух направлениях: 1) тестирование эвристик; 2) построение ε-оптимального решения при $\varepsilon = \varepsilon_0$. В обоих случаях мы выбираем из соображений минимизации функции (27) точку $x_0 \in \mathbb{K}$, для которой

$$v_N(x_0, \overline{1, N}) = \min_{x \in \mathbb{K}} v_N(x, \overline{1, N}). \tag{33}$$

В силу (28) получаем тогда неравенство $|v_N(x_0, \overline{1, N}) - \mathbb{V}| \leq \varepsilon_0$.

1) Располагая такой точкой x_0 и значением $v_N(x_0, \overline{1, N})$, мы рассматриваем «быстрые»; эвристики, для которых регистрируем значения (11): имеются в виду УП $(\alpha^*, \mathbf{z}^*) \in \tilde{\mathbf{D}}[x_0]$, определяемые тем или иным эвристическим алгоритмом, и получающиеся в ходе вычислительного эксперимента величины $\mathfrak{C}_{\alpha^*}[\mathbf{z}^*] \in \mathbb{R}_+$, определяемые посредством (11). Мы выбираем эвристическое решение из соображений наибольшей близости к $v_N(x_0, \overline{1, N})$, чем обеспечивается (см. (27)) и должное приближение к $\mathbb{V}$ по результату (конечно, имеется в виду случай достаточно малого значения ε_0). Тем самым из набора эвристик можно выбрать ε-наилучшую в смысле приближения к $\mathbb{V}$ при $\varepsilon > \varepsilon_0$. Заметим, что для достаточно больших значений N при решении задачи (14) приходится использовать эвристики. В [18] отмечено, однако, что размерность задач исследуемого типа, допускающих точное построение экстремума, все-таки несколько выше той размерности, при которой удается, помимо экстремума, найти оптимальное решение, т.е. элемент соответствующего множества (13). Это связано с тем, что при построении функции (27) можно использовать (при реализации (22)) процедуру перезаписи слоев и, как следствие, более рационально использовать память компьютера (в памяти при этом находится только один слой значений функции Беллмана; подробнее см. в [18]). Данная процедура допускает естественную аналогию с [19].

2) Построение ε-оптимального ($\varepsilon = \varepsilon_0$) решения соответствует [7] при выборе $x_0 \in \mathbb{K}$ со свойством (33) в качестве н.у. Наметим данную процедуру совсем кратко (см. [7, раздел 4]), фиксируя x_0 (см. (33)). Полагаем $\mathbf{z}^{(0)} \triangleq (x_0, x_0)$ и с учетом (23) выбираем $\eta_1 \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$ и $\mathbf{z}^{(1)} \in \mathbb{M}_{\eta_1}$ так, что

$$\begin{gathered} v_N(x_0, \overline{1, N}) = \mathbf{c}(x_0, \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1, N}) + \\ + c_{\eta_1}(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1, N}) + v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}). \end{gathered} \tag{34}$$

При этом $(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}) \in D_{N-1}$, что позволяет применить для нахождения $v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\})$ надлежащий вариант (22). Далее, выбираем $\eta_2 \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\eta_1\})$ и $\mathbf{z}^{(2)} \in \mathbb{M}_{\eta_2}$ из условия

$$\begin{gathered} v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}) = \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}) + \\ + c_{\eta_2}(\mathbf{z}^{(2)}, \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{N-2}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}) \end{gathered} \tag{35}$$

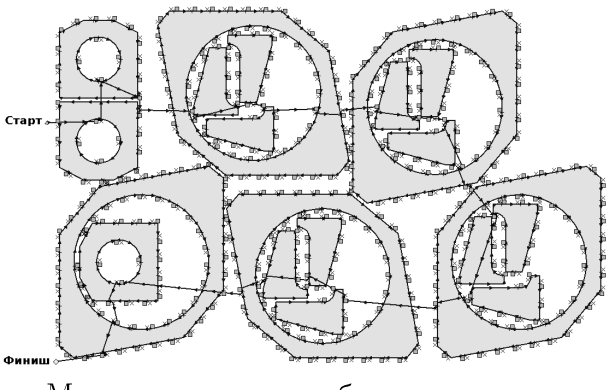
(см. (22)), получая также $(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}) \in D_{N-2}$. Дальнейшие построения подобны (34), (35) и доставляют в итоге ДР $(\eta, (\mathbf{z}^{(j)})_{j \in \overline{0, N}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x_0]$, где $\eta \triangleq (\eta_j)_{j \in \overline{1, N}}$, со свойством $\mathfrak{C}_\eta[(\mathbf{z}^{(j)})_{j \in \overline{0, N}}] = V[x_0]$ (см. [20, раздел 7]). С учетом (13) получаем, что $(\eta, (\mathbf{z}^{(j)})_{j \in \overline{0, N}}) \in (\mathrm{SOL})[x_0]$.

4. Вычислительный эксперимент

В ходе вычислительного эксперимента были произведены несколько расчетов, демонстрирующих работу алгоритма выбора начальной точки. Вычисления производились на компьютере с процессором Intel i5-2400 и 8 Гб оперативной памяти, работающем под управлением Linux Kubuntu 16.04 (64-bit). Программа разработана на языке C++ с использованием библиотеки Qt. Рассматривался модельный вариант задачи управления инструментом при листовой резке на машинах с ЧПУ, соответствующий схеме [7, разделы 5, 6] (процедура раскроя предполагается выполненной). Предполагается, что мегаполисы получены дискретизацией контуров, подлежащих резке. С каждым «городом» мегаполиса (т.е. с точкой на эквидистанте) связываются точка врезки и точка выключения инструмента; получаемый триплет именуем системой врезки. Время резки по эквидистантам не учитываем, поскольку оно одно и то же для всех ДР. Конкретный выбор ДР влияет на время внешних перемещений, время перемещений для каждой системы врезки и время перемещения к заданной терминальной точке.

Предполагаем, что множество X раздела 2, содержащее мегаполисы, есть прямоугольник на плоскости (т.е. в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$), определяемый точками (-25 мм; -25 мм), (-25 мм; 1025 мм), (1600 мм; 1025 мм) и (1600 мм; -25 мм); X^0 – граница упомянутого прямоугольника. Используемые функции стоимости соответствуют [7, разделы 5, 6] и характеризуют время движения инструмента. При этом стоимость внешних перемещений, определяемая функцией $\mathbf{c}$, соответствовала скорости 500 мм/с. Аналогично задавалась стоимость перемещения в терминальную точку, характеризуемая посредством f. Стоимость внутренних работ для каждой системы врезки определялась в виде суммы двух слагаемых, одно из которых определялось временем перемещений в системе врезки (от точки врезки до соответствующей ей точки на эквидистанте и от этой последней точки до точки выключения инструмента) со скоростью 10 мм/с, а второе определялось штрафом, связанным с использованием тепловых допусков. Соответствующий вариант оценивания внутренних работ приведен в [7, разделы 5, 6] (в частности, см. [7, (6.1)]). Различие в скоростях соответствует движениям в режиме холостого хода и в металле. Заметим, что функция $\mathbf{c}$, используемая при вычислениях, соответствует примеру 1 раздела 2.

Предполагалось, что $N = 28$, множество $\mathbf{K}$ адресных пар имело мощность $|\mathbf{K}| = 21$. Найденный экстремум 62,44 секунды, время счета 8 минут 7 секунд. Оптимальная начальная точка (см. (33)) есть $(-25; 675)$. Маршрут и трасса приведены на рисунке.



Маршрут и трасса обхода множеств

Работа проводилась при финансовой поддержке комплексной программы УрО РАН, проект 18-1-1-9 «Оценивание динамики нелинейных управляемых систем и маршрутная оптимизация».

Литература

1. Gutin, G. The Traveling Salesman Problem and Its Variations / G. Gutin, A.P. Punnen. – N.Y.: Springer, 2002.
2. Cook, W.J. In Pursuit of the Traveling Salesman. Mathematics at the Limits of Computation / W.J. Cook. – New Jersey: Princeton University Press, 2012.
3. Меламед, И.И. Задача коммивояжера. Вопросы теории / И.И. Меламед, С.И. Сергеев, И.Х. Сигал // Автоматика и телемеханика. – 1989. – Т. 50, № 9. – С. 3–34.
4. Меламед, И.И. Задача коммивояжера. Точные алгоритмы / И.И. Меламед, С.И. Сергеев, И.Х. Сигал // Автоматика и телемеханика. – 1989. – Т. 50, № 10. – С. 3–29.
5. Меламед, И.И. Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы / И.И. Меламед, С.И. Сергеев, И.Х Сигал // Автоматика и телемеханика. – 1989. – Т. 50, № 11. – С. 3–26.
6. Ченцов, А.Г. Задача маршрутизации с ограничениями, зависящими от списка заданий / А.Г. Ченцов, А.А. Ченцов // Доклады Академии наук. – 2015. – Т. 465, № 2. – С. 154–158.
7. Ченцов, А.Г. Маршрутизация в условиях ограничений: задача о посещении мегаполисов / А.Г. Ченцов, П.А. Ченцов // Автоматика и телемеханика. – 2016. – № 11. – С. 96–117.
8. Ченцов, А.Г. Одна параллельная процедура построения функции Беллмана в обобщенной задаче курьера с внутренними работами / А.Г. Ченцов // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 3. – С. 134–149.
9. Коробкин, В.В. Методы маршрутизации и их приложения в задачах повышения безопасности и эффективности эксплуатации атомных станций / В.В. Коробкин, А.Н. Сесекин, О.Л. Ташлыков, А.Г. Ченцов. – М.: Новые технологии, 2012.
10. Беллман, Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере / Р. Беллман // Кибернетический сборник. – 1964. – Т. 9. – С. 219–228.
11. Хелд, М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения / М. Хелд, Р.М. Карп // Кибернетический сборник. – 1964. – Т. 9. – С. 202–218.
12. Литл, Дж. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере / Дж. Литл, К. Мурти, Д. Суини, К. Кэрел // Экономика и математические методы. – 1965. – Т. 1, вып. 1. – С. 94–107.
13. Куратовский, К. Теория множеств / К. Куратовский, А. Мостовский. – М.: Мир. – 1970.
14. Дьедонне, Ж. Основы современного анализа / Ж. Дьедонне. – М.: Мир. – 1964.
15. Кормен, Т. Алгоритмы: Построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест. – М.: МЦНМО, 2002.
16. Энгелькинг, Р. Общая топология / Р. Энгелькинг. – М.: Мир, 1986.
17. Ченцов, А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории / А.Г. Ченцов. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008.
18. Ченцов, А.А. К вопросу о нахождении значения маршрутной задачи с ограничениями / А.А. Ченцов, А.Г. Ченцов // Проблемы управления и информатики. – 2016. – № 1. – С. 41–54.

19. Lawler, E.L. Efficient Implementation of Dynamic Programming Algorithms for Sequencing Problems / E.L. Lawler // CWI. Technical Reports. Stichting Mathematish Centrum. Mathematische Besliskunde. – 1979. – BW 106/79 – P. 1–16.
20. Ченцов, А.Г. К вопросу о маршрутизации комплексов работ / А.Г. Ченцов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2013. – № 1. – С. 59–82.

Александр Георгиевич Ченцов, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, отдел «Управляемые системы», Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН; профессор, кафедра «Прикладная математика и механика», Уральский федеральный университет (г. Екатеринбург, Российская Федерация), chentsov@imm.uran.ru.

Павел Александрович Ченцов, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, отдел «Вычислительные сети», Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН; старший научный сотрудник, лаборатория «Оптимальный раскрой промышленных материалов и оптимальные маршрутные технологии», Уральский федеральный университет (г. Екатеринбург, Российская Федерация), chentsov.p@mail.ru.

Поступила в редакцию 10 апреля 2018 г.

MSC 93CXX **DOI: 10.14529/mmp180207**

OPTIMIZATION OF THE START POINT IN THE GTSP WITH THE PRECEDENCE CONDITIONS

A.G. Chentsov[1,2], ***P.A. Chentsov***[1,2]

[1] Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UrB RAS, Ekaterinburg, Russian Federation

[2]Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation

E-mail: chentsov@imm.uran.ru, chentsov.p@mail.ru

The paper is devoted to the routing problem with constraints and cost functions that can depend on the list of tasks. It is assumed that the initial condition for the process with discrete time can be selected within a metric space that satisfies the condition of complete boundedness. It is supposed that the problem includes a visiting of a finite system of megalopolises (non-empty finite sets) with the fulfillment of some works. The cost of these works each time depend on the point of arrival and the point of departure. The costs of movement and work are aggregated additively. For the problem solution widely understood dynamic programming method providing ε-optimal solution for any $\varepsilon > 0$ is used.

Keywords: route task; restrictions; start point.

References

1. Gutin G., Punnen A.P. *The Traveling Salesman Problem and Its Variations*, N.Y., Springer, 2002.
2. Cook W.J. *In Pursuit of the Traveling Salesman. Mathematics at the Limits of Computation.* New Jersey, Princeton University Press, 2012.

3. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I. The Traveling Salesman Problem. Issues in the Theory. *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 9, pp. 1147–1173.
4. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I. The Traveling Salesman Problem. Exact Methods. *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 10, pp. 1303–1324.
5. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I. The Traveling Salesman Problem. Approximate Algorithms. *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 11, pp. 1459–1479.
6. Chentsov A.G., Chentsov A.A. Route Problem with Constraints Depending on a List of Tasks. *Doklady Mathematics*, 2015, vol. 92, no. 3, pp. 685–688. DOI: 10.1134/S1064562415060083
7. Chentsov A.G., Chentsov P.A. Routing Under Constraints: Problem of Visit to Megalopolises. *Automation and Remote Control*, 2016, vol. 77, no. 11, pp. 1957–1974. DOI: 10.1134/S0005117916110060
8. Chentsov A.G. One Parallel Procedure for the Construction of the Bellman Function in the Generalized Problem of the Courier with the Inner Workings. *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 3, pp. 134–149.
9. Korobkin V.V., Sesekin A.N., Tashlykov O.L., Chentsov A.G. *Routing Methods and Their Applications to the Enhancement of Safety and Efficiency of Nuclear Plant Operation.* Moscow, Novye tekhnologii, 2012. (in Russian)
10. Bellman R. Dynamic Programming Treatment of the Travelling Salesman Problem. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 1962, vol. 9, pp. 61–63. DOI: 10.1145/321105.321111
11. Held M., Karp R.M. A Dynamic Programming Approach to Sequencing Problems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1962, vol. 10, no. 1, pp. 196–210. DOI: 10.1137/0110015
12. Little J., Murty K., Sweeney D., Karel C. An Algorithm for the Traveling Salesman Problem, Operations Research, 1963, vol. 11, no. 6, pp. 972–989. DOI: 10.1287/opre.11.6.972
13. Kuratowski K., Mostowski A. *Set Theory.* Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1967.
14. Dieudonne J. *Foundations of Modern Analysis.* New York, Academic Press, 1960.
15. Cormen T., Leiserson C., Rivest R. *Introduction to Algorithms.* MIT Press and McGraw-Hill, 1990.
16. Engelking R. *General Topology.* Polish Scientific Publishers, 1977.
17. Chentsov A.G. *Ekstremalnye zadachi marshrutizacii i raspredeleniya zadaniy voprosy teorii* [Extreme Routing and Task Distribution Problems: Theory Questions]. Izhevsk, NITs "Regulyarnaya i Khaoticheskaya Dinamika", 2008. (in Russian)
18. Chentsov A.G., Chentsov A.A. On the Problem of Obtaining the Value of Routing Problem with Constraints. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2016, vol. 6, pp. 41–54.
19. Lawler E.L. Efficient Implementation of Dynamic Programming Algorithms for Sequencing Problems. *CWI Technical report. Stichting Mathematisch Centrum. Mathematische Besliskunde-BW*, 1979, vol. 106, no. 79, pp. 1–16.
20. Chentsov A.G. To Question of Routing of Works Complexes. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuternye nauki*, 2013, no. 1, pp. 59–82. (in Russian)

Received April 10, 2018