УДК 517.946 **DOI: 10.14529/mmp170202**

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

***А.И. Кожанов*[1], *Л.А. Телешева*[2]**
[1]Институт математики им. С.Л. Соболева, г. Новосибирск
[2]Бурятский государственный университет, г. Улан-Удэ

Объектом исследования в работе являются нелинейные обратные коэффициентные задачи для нестационарных дифференциальных уравнений высокого порядка типа псевдогиперболических. Более точно, изучаются задачи определения вместе с решением соответствующего уравнения также неизвестного коэффициента при решении или же при производной решения по временной переменной. Отличительной особенностью рассматриваемых задач является то, что неизвестный коэффициент является функцией лишь от времени. В качестве дополнительного условия в работе используется условие интегрального переопределения. Доказываются теоремы существования регулярных (имеющих все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в уравнение) решений. Техника доказательства основана на переходе от исходной обратной задачи к новой, уже прямой, задаче для вспомогательного интегро-дифференциального уравнения, доказательстве ее разрешимости и построении по решению вспомогательной задачи решения исходной обратной задачи.

Ключевые слова: псевдогиперболические уравнения высокого порядка; обратная задача; регулярные решения; существование.

Введение

Коэффициентные обратные задачи для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений второго порядка к настоящему времени достаточно хорошо изучены. Существенный вклад в исследование разрешимости таких задач внесли М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, Ю.Е. Аниконов, А.И. Прилепко, А. Лоренци, С.И. Кабанихин, А.М. Денисов, М. Ямамото, В. Исаков, М. Клибанов, Дж. Кэннон, Б.А. Бубнов, Н.Я. Безнощенко, Д.Г. Орловский, Н. Иванчов (достаточно полную библиографию работ, связанных с исследованием разрешимости коэффициентных обратных задач, можно найти в монографиях [1–11]). Менее изученными на сегодняшний день представляются коэффициентные обратные задачи для нестационарных дифференциальных уравнений высокого порядка – в частности, для псевдогиперболических уравнений высокого порядка. Частично восполнить данный пробел и должна настоящая работа.

Прежде чем переходить к содержательной части работы, сделаем три замечания. Прежде всего заметим, что необходимая в обратных задачах дополнительная информация (условия переопределения) задается в настоящей работе как информация о значении некоторых интегралов от решения по пространственной области. Уточним, что интерес авторов к обратным задачам с подобной дополнительной информацией объясняется не только интересом к решению новых математических задач, но и тем, что близкие задачи возникают в математическом моделировании – см., например, работы [9, 12–14]. Следующее замечание: как близкие к настоящей работе по используемой технике и по постановкам задач отметим статьи [15–20]. И наконец, заметим, что обратные задачи для дифференциальных уравнений часто возникают в математическом моделировании при описании тех или иных физических химических и т.п. процессов, протекающих в средах с заранее неизвестными характеристиками.

1. Постановка задач

Пусть Ω есть ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (бесконечно-дифференцируемой) границей Γ, Q есть цилиндр $\Omega \times (0,T)$ конечной высоты T, $S = \Gamma \times (0,T)$ есть боковая граница Q. Далее, пусть $f(x,t)$, $N(x)$, $\mu(t)$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$ – заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$, a есть заданное положительное число.

Обратная задача I: *найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением*

$$u_{tt} - a\Delta u_t + \Delta^2 u + q(t)u = f(x,t), \tag{1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,t) = \Delta u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S; \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega; \tag{3}$$

$$\int\limits_\Omega N(x)u(x,t)\,dx = \mu(t) \quad \text{при} \quad t \in (0,T). \tag{4}$$

Обратная задача II: *найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением*

$$u_{tt} - a\Delta u_t + \Delta^2 u + q(t)u_t = f(x,t), \tag{5}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (2) – (4).

В изучаемых обратных задачах I и II условие (4) представляет собой условие интегрального переопределения. В случае $a = 2$ уравнения (1) и (5) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)^2 u + q(t)u = f(x,t), \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)^2 u + q(t)u_t = f(x,t),$$

то есть в виде уравнений, старшая часть которых есть итерированный оператор теплопроводности.

2. Разрешимость обратной задачи I

Известно, что для любой функции $v(x)$ такой, что $v(x) \in W_2^4(\Omega)$, $v(x) = \Delta v(x) = 0$ при $x \in \Gamma$, выполняются неравенства

$$\int\limits_\Omega v^2(x)\,dx \le C_0 \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v_{x_i}^2(x)\,dx \le C_1 \int\limits_\Omega [\Delta v(x)]^2\,dx, \tag{6}$$

$$\int\limits_{\Omega}[\Delta v(x)]^2\,dx \le C_0\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}[\Delta v_{x_i}(x)]^2\,dx \le C_1\int\limits_{\Omega}[\Delta^2 v(x)]^2\,dx, \tag{7}$$

постоянные C_0 и C_1 в которых определяются лишь областью Ω [21].

Далее, пусть $w(x,t)$ есть функция из пространства $L_\infty(0,T;W_2^3(\Omega))$ такая, что $w(x,t)\in L_\infty(0,T;W_2^3(\Omega))$, $w_t(x,t)\in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))$. Определим функцию $\varphi(t,w)$:

$$\varphi(t,w)=\frac{1}{\mu(t)}\left\{\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}N_{x_i}(x)\Delta w_{x_i}(x,t)\,dx - a\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}N_{x_i}(x)w_{x_it}(x,t)\,dx\right\}.$$

Введем еще некоторые обозначения. Именно, положим

$$F(t)=\int\limits_{\Omega}N(x)f(x,t)\,dx,\quad p(t)=\tfrac{1}{\mu(t)}[F(t)-\mu''(t)],$$
$$\alpha_1=C_1+1,\quad \beta_1=\tfrac{(a+1)(C_1+1)N_1}{\mu_0},$$
$$\gamma_1=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}u_{1x_i}^2(x)\,dx+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}[\Delta u_{0x_i}(x)]^2\,dx+\tfrac{1}{a}\int\limits_{Q}f^2\,dx\,dt,$$
$$\mu_0=\min_{0\le t\le T}\mu(t),\quad N_1=\max_{i=1,\dots,n}\left(\int\limits_{\Omega}N_{x_i}^2(x)\,dx\right)^{\frac12}.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$N(x)\in C^1(\overline{\Omega}),\quad \mu(t)\in C^2[0,T],\quad u_0(x)\in W_2^3(\Omega),\quad u_1(x)\in W_2^2(\Omega),\quad f(x,t)\in L_2(Q);$$
$$a>0,\quad \mu_0>0;$$
$$N(x)=0\quad \textit{при}\quad x\in\Gamma;$$
$$u_0(x)=\Delta u_0(x)=u_1(x)=\Delta u_1(x)=0\quad \textit{при}\quad x\in\Gamma;$$
$$\int\limits_{\Omega}N(x)u_0(x)\,dx=\mu(0),\quad \int\limits_{\Omega}N(x)u_1(x)\,dx=\mu'(0);$$
$$\int\limits_0^T e^{-\frac{\alpha_1}{2}\int\limits_0^t|p(\tau)|\,d\tau}\,dt<\frac{2}{\beta_1\sqrt{\gamma_1}}.$$

Тогда обратная задача I имеет решение $\{u(x,t),q(t)\}$ *такое, что* $u(x,t)\in W_2^{4,2}(Q)\cap L_\infty(0,T;W_2^3(\Omega))$, $u_t(x,t)\in L_2(0,T;W_2^2(\Omega))\cap L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))$, $q(t)\in L_2([0,T])$.

Доказательство. Воспользуемся методом срезок и методом неподвижной точки. Пусть M есть положительное число. Определим функцию $G_M(\xi)$, $\xi\in\mathbb{R}$:

$$G_M(\xi)=\begin{cases}\xi & \textit{при}\quad |\xi|\le M,\\ M & \textit{при}\quad \xi>M,\\ -M & \textit{при}\quad \xi<M.\end{cases}$$

Обозначим для краткости через V следующее пространство

$$V=\big\{v(x,t):\quad v(x,t)\in W_2^{4,2}(Q)\cap L_\infty(0,T;W_2^3(\Omega)),$$
$$v_t(x,t)\in L_2(0,T;W_2^2(\Omega))\cap L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega)),\quad v_{tt}(x,t)\in L_2(Q)\big\}$$

с нормой

$$\|v\|_V = \left(\|v\|^2_{W_2^{4,2}(Q)} + \|v\|^2_{L_\infty(0,T;W_2^3(\Omega))} + \|v_t\|^2_{L_2(0,T;W_2^3(\Omega))} + \|v_t\|^2_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))} + \|v_{tt}\|^2_{L_2(Q)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что пространство V есть банахово пространство.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_{tt} - a\Delta u_t + \Delta^2 u + [p(t) + G_M(\varphi(t,u))]\, u = f(x,t) \tag{8}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3). Разрешимость этой задачи нетрудно установить с помощью метода неподвижной точки.

Пусть $v(x,t)$ есть функция из пространства V. Рассмотрим задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_{tt} - a\Delta u_t + \Delta^2 u + [p(t) + G_M(\varphi(t,v))]\, u = f(x,t) \tag{8_v}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3). Эта задача является естественной начально-краевой задачей для линейного уравнения (8_v), разрешимость ее в пространстве V известна – см., например, [22]. Следовательно, краевая задача (8_v), (2), (3) порождает оператор A, переводящий пространство V в себя: $A(v) = u$.

Для решений $u(x,t)$ краевой задачи (8_v), (2), (3) имеет место априорная оценка

$$\|u\|_V \le R_0 \tag{9}$$

с постоянной R_0, определяющейся лишь функциями $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\mu(t)$, $N(x)$, числами a, T, M и областью Ω. Доказательство этой оценки нетрудно провести, анализируя равенства

$$-\int_0^T\int_\Omega \{u_{\tau\tau} - a\Delta u_\tau + \Delta^2 u + [p(\tau) + G_M(\varphi(\tau,v))]u\}\,\Delta u_\tau\,dx\,d\tau = -\int_0^T\int_\Omega f(x,\tau)\Delta u_\tau\,dx\,d\tau,$$
$$\int_0^T\int_\Omega \{u_{\tau\tau} - a\Delta u_\tau + \Delta^2 u + [p(\tau) + G_M(\varphi(\tau,v))]u\}\,\Delta^2 u\,dx\,d\tau = \int_0^T\int_\Omega f(x,\tau)\Delta^2 u\,dx\,d\tau,$$
$$\int_0^T\int_\Omega \{u_{\tau\tau} - a\Delta u_\tau + \Delta^2 u + [p(\tau) + G_M(\varphi(\tau,v))]u\}\,u_{\tau\tau}\,dx\,d\tau = \int_0^T\int_\Omega f(x,\tau)u_{\tau\tau}\,dx\,d\tau.$$

Обозначим через B_{R_1} замкнутый шар радиуса R_1 пространства V. Из оценки (9) следует, что оператор A в случае $R_1 \ge R_0$ переводит шар B_{R_1} в себя. Далее, из той же оценки (9) следует, что оператор A будет вполне непрерывным.

Докажем, что оператор A вполне непрерывен на шаре B_{R_1}. Пусть $\{v_m(x,t)\}_{m=1}^\infty$ есть последовательность функций из шара B_{R_1}, сходящаяся в пространстве V к функции $v(x,t)$. Далее, пусть $u_m(x,t)$, $m = 1,2,\ldots$, $u(x,t)$ есть образы функций $v_m(x,t)$, $m = 1,2,\ldots$, $v(x,t)$ соответственно при действии оператора A. Обозначим $\overline{v}_m(x,t) = v_m(x,t) - v(x,t)$, $\overline{u}_m(x,t) = u_m(x,t) - u(x,t)$. Имеем следующие соотношения

$$\overline{u}_{mtt} - a\Delta\overline{u}_{mt} + \Delta^2\overline{u}_m + [p(t) + G_M(\varphi(t,v_m))]\,\overline{u}_m =$$
$$= [G_M(\varphi(t,v)) - G_M(\varphi(t,v_m))]\,u_m \ \text{\textit{при}}\ (x,t) \in Q,$$
$$\overline{u}_m(x,t) = \Delta\overline{u}_m(x,t) = 0 \quad \text{\textit{при}} \quad (x,t) \in S,$$
$$\overline{u}_m(x,0) = \overline{u}_{mt}(x,0) = 0 \quad \text{\textit{при}} \quad x \in \Omega.$$

Используя технику доказательства оценки (9) и используя также липшицевость функции $G_M(\xi)$, нетрудно получить неравенство

$$\|\overline{u}_m\|_V^2 \leq C \int\limits_0^t |\varphi(\tau, \overline{v}_m)|^2 \, d\tau.$$

Из этого неравенства и из сходимости функций $\overline{v}_m(x,t)$ в пространстве V к нулевой функции следует сходимость $\|\overline{u}_m\|_V \to 0$ при $m \to \infty$. Эта сходимость означает, что оператор A непрерывен в пространстве V.

Покажем, что оператор A компактен на шаре B_{R_1}. Пусть $\{v_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ есть произвольная последовательность функций из шара B_{R_1}, $\{u_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ есть последовательность образов функций $v_m(x,t)$ при действии оператора A. Из ограниченности в пространстве V последовательности $\{v_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$, из свойства рефлексивности гильбертова пространства и из теорем вложения [21] следует, что существуют подпоследовательность $\{v_{m_k}(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ исходной последовательности $\{v_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ и функция $v(x,t)$ такие, что при $k \to \infty$ имеют место сходимости

$$v_{m_k}(x,t) \to v(x,t) \quad \textit{слабо в пространстве} \quad W_2^{4,2}(Q),$$

$$\Delta v_{m_k}(x,t) \to \Delta v(x,t) \quad \textit{сильно в пространствах} \quad L_2(Q) \quad \textit{и} \quad L_2(S),$$

$$v_{m_k}(x,t) \to v_t(x,t) \quad \textit{сильно в пространствах} \quad L_2(Q) \quad \textit{и} \quad L_2(S).$$

Заметим, что функцию $\varphi(t,v)$ можно записать в виде

$$\varphi(t,v) = \frac{1}{\mu(t)} \Big\{ a \int\limits_\Omega \Delta N(x) v_t(x,t)\, dx + a \int\limits_\Gamma \frac{\partial N(x)}{\partial \nu} v_t(x,t)\, ds -$$
$$- \int\limits_\Omega \Delta N(x) \Delta v(x,t)\, dx - \int\limits_\Gamma \frac{\partial N(x)}{\partial \nu} \Delta v(x,t)\, ds \Big\}.$$

Определим функцию $u(x,t)$ как решение краевой задачи (8_v), (2), (3) с функцией $\varphi(t,v)$, определенной указанным выше образом – уточним, что функция $u(x,t)$ корректно определена. Положим $\overline{v}_k(x,t) = v_{m_k}(x,t) - v(x,t)$, $\overline{u}_k(x,t) = u_{m_k}(x,t) - u(x,t)$. Повторяя теперь для последовательностей $\{\overline{v}_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\overline{u}_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ доказательство непрерывности оператора A, получим, что имеет место сходимость $\|\overline{u}_k\|_V \to 0$ при $k \to \infty$. Эта сходимость и дает компактность оператора A.

Согласно теореме Шаудера [23], оператор A имеет в шаре B_{R_0} хотя бы одну неподвижную точку $u(x,t)$. Эта неподвижная точка будет представлять собой решение краевой задачи (8), (2), (3). Покажем, что при выполнении условий теоремы можно выбрать (и зафиксировать) число M так, что будет выполняться равенство

$$G_M(\varphi(t,u)) = \varphi(t,u). \tag{10}$$

Рассмотрим равенство

$$-\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \left\{ u_{\tau\tau} - a\Delta u_\tau + \Delta^2 u + [p(\tau) + G_M(\varphi(\tau,u))]u \right\} \Delta u_\tau \, dx\, d\tau = -\int\limits_0^T \int\limits_\Omega f(x,\tau) \Delta u_\tau \, dx\, d\tau.$$

Интегрируя по частям и используя условия (2) и (3), нетрудно от данного равенства перейти к следующему

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} u_{x_it}^2(x,t)\,dx+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}[\Delta u_{x_i}(x,t)]^2\,dx+a\int_0^t\int_{\Omega}(\Delta u_\tau)^2\,dx\,d\tau=\\ =-\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_{\Omega}p(\tau)u_{x_i}u_{x_i\tau}\,dx\,d\tau-\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_{\Omega}G_M(\varphi(\tau,u))u_{x_i}u_{x_i\tau}\,dx\,d\tau-\\ -\int_0^t\int_{\Omega}f\Delta u_\tau\,dx\,d\tau+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}u_{1x_i}^2(x)\,dx+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}[\Delta u_{0x_i}(x)]^2\,dx.\end{gathered}\tag{11}$$

Оценим правую часть (11). Положим

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}u_{x_it}^2(x,t)\,dx+\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}[\Delta u_{x_i}(x,t)]^2\,dx.$$

Условия теоремы, неравенства (6) и (7), а также неравенство Юнга дают оценки

$$|\varphi(\tau,u)|\le\frac{N_1}{\mu_0}\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{\Omega}[\Delta u_{x_i}(x,\tau)]^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{aN_1}{\mu_0}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}u_{x_i\tau}^2(x,\tau)\,dx\le\frac{(a+1)N_1y^{\frac{1}{2}}(\tau)}{\mu_0},$$

$$\begin{gathered}\left|\int_0^t\int_{\Omega}\left[p(\tau)\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}(x,\tau)u_{x_i\tau}(x,\tau)\right]dx\,d\tau\right|\le\int_0^t|p(\tau)|\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}|u_{x_i}(x,\tau)||u_{x_i\tau}(x,\tau)|\,dx\right)d\tau\le\\ \le\frac{1}{2}\int_0^t|p(\tau)|\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}u_{x_i}^2(x,\tau)\,dx\right)d\tau+\frac{1}{2}\int_0^t|p(\tau)|\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}u_{x_i\tau}^2(x,\tau)\,dx\right)d\tau\le\\ \le\frac{1}{2}C_1\int_0^t|p(\tau)|y(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\int_0^t|p(\tau)|y(\tau)\,d\tau=\frac{1}{2}(C_1+1)\int_0^t|p(\tau)|y(\tau)\,d\tau,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\left|\int_0^t\int_{\Omega}G_M(\varphi(\tau,u))\left(\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}(x,\tau)u_{x_i\tau}(x,\tau)\right)dx\,d\tau\right|\le\\ \le\int_0^t|\varphi(\tau,u)|\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}|u_{x_i}(x,\tau)||u_{x_i\tau}(x,\tau)|\right)dx\,d\tau\le\\ \le\frac{(a+1)N_1}{2\mu_0}\int_0^t y^{1/2}(\tau)\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}u_{x_i}^2(x,\tau)\,dx\right)d\tau+\\ +\frac{(a+1)N_1}{2\mu_0}\int_0^t y^{1/2}(\tau)\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}u_{x_i\tau}^2(x,\tau)\,dx\right)d\tau\le\frac{(a+1)(C_1+1)N_1}{2\mu_0}\int_0^t y^{3/2}(\tau)\,d\tau,\end{gathered}$$

$$\left|\int_0^t\int_{\Omega}f\Delta u_\tau\,dx\,d\tau\right|\le\frac{a}{2}\int_0^t\int_{\Omega}(\Delta u_\tau)^2\,dx\,d\tau+\frac{1}{2a}\int_{Q}f^2\,dx\,dt.$$

Используя эти оценки, нетрудно от (11) перейти к неравенству

$$y(t)\le\alpha_1\int_0^t p(\tau)y(\tau)\,d\tau+\beta_1\int_0^t y^{3/2}(\tau)\,d\tau+\gamma_1.$$

Определим функцию $z(t)$ как решение задачи Коши

$$z'(t)=\alpha_1p(t)z(t)+\beta_1z^{\frac{3}{2}}(t),\quad z(0)=\gamma_1.$$

Согласно обобщенной лемме Гронуолла (лемме Гронуолла – Бихари [24, 25]), на промежутке существования функции $z(t)$ выполняется неравенство $y(t) \leq z(t)$. Справедливы равенства

$$z(t) = \frac{1}{\psi^2(t)}, \quad \psi(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma_1}} - \frac{\beta_1}{2}\int\limits_0^t e^{-\frac{\alpha_1}{2}\int\limits_0^\tau |p(s)|\,ds}\,d\tau\right) e^{\frac{\alpha_1}{2}\int\limits_0^t |p(\tau)|\,d\tau}.$$

Из последнего условия теоремы вытекает, что существует положительное число m_0 такое, что при $t \in [0,T]$ выполняется $\psi(t) \geq m_0$. Следовательно, функции $z(t)$ и $y(t)$ будут ограничены на отрезке $[0,T]$: $y(t) \leq z(t) \leq \frac{1}{m_0^2}$. Далее, имеем $|\varphi(t,u)| \leq \frac{(a+1)N_1}{\mu_0 m_0}$. Выберем теперь число M так, чтобы выполнялось неравенство

$$M \geq \frac{(a+1)N_1}{\mu_0 m_0}. \tag{12}$$

Для такого числа M и будет выполняться равенство (10).

Итак, при указанном выше выборе числа M для решения $u(x,t)$ краевой задачи (8), (2), (3) будет выполняться уравнение

$$u_{tt} - a\Delta u_t + \Delta^2 u + [p(t) + \varphi(t,u)]u = f(x,t). \tag{13}$$

Определим функцию $q(t)$:

$$q(t) = p(t) + \varphi(t,u).$$

Очевидно, что функции $u(x,t)$ и $q(t)$ связаны в цилиндре Q уравнением (1), и что для функций $u(x,t)$ и $q(t)$ выполняются требуемые включения.

Наконец, выполнение для решения $u(x,t)$ краевой задачи (8), (2), (3) с числом M, удовлетворяющим неравенству (12), интегрального условия переопределения (4) показывается также, как показывается выполнение аналогичного условия в работах [15–17, 19].

Изложенное выше и означает, что построенные функции $u(x,t)$ и $q(t)$ дают требуемое решение обратной задачи I. $\square$

Приведем еще один вариант теоремы о разрешимости обратной задачи I.

Определим пространство V_1:

$$V_1 = \{v(x,t): \quad v(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^4(\Omega)),$$
$$v_t(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^3(\Omega)) \cap L_2(0,T;W_2^4(\Omega)), \quad v_{tt}(x,t) \in L_2(Q)\}.$$

Зададим в пространстве V_1 норму:

$$\|v\|_{V_1} = \left\{\|v\|^2_{L_\infty(0,T;W_2^4(\Omega))} + \|v_t\|^2_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|^2_{L_2(0,T;W_2^4(\Omega))} + \|v_{tt}\|^2_{L_2(Q)}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что пространство V_1 с такой нормой будет банаховым пространством.

Пусть $w(x,t)$ есть функция из пространства V_1. Определим функцию $\widetilde{\varphi}(t,w)$:

$$\widetilde{\varphi}(t,w) = \frac{1}{\mu(t)}\left[a\int\limits_\Omega N(x)\Delta w_t(x,t)\,dx - \int\limits_\Omega N(x)\Delta^2 w(x,t)\,dx\right].$$

Далее, положим

$$N_0 = \Big(\int\limits_\Omega N^2(x)\,dx \Big)^{\frac{1}{2}}, \quad \beta_2 = \frac{(a+1)N_0}{\mu_0},$$

$$\gamma_2 = \int\limits_\Omega [\Delta u_1(x)]^2\,dx + \int\limits_\Omega [\Delta^2 u_0(x)]^2\,dx + \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_Q f_{x_i}^2\,dx\,dt.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*

$$N(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \mu(t) \in C^2([0,T]), \quad f(x,t) \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)); \quad a > 0, \quad \mu_0 > 0;$$

$$N(x) = 0 \quad \textit{при} \quad x \in \Gamma;$$

$$u_0(x) \in W_2^4(\Omega), \quad u_1(x) \in W_2^2(\Omega);$$

$$u_0(x) = \Delta u_0(x) = u_1(x) = 0 \quad \textit{при} \quad x \in \Gamma;$$

$$\int\limits_\Omega N(x)u_0(x)\,dx = \mu(0), \quad \int\limits_\Omega N(x)u_1(x)\,dx = \mu'(0);$$

$$\int\limits_0^T e^{-\frac{\alpha_1}{2}\int\limits_0^t |p(\tau)|\,d\tau}\,dt < \frac{2}{\beta_2\sqrt{\gamma_2}}.$$

Тогда обратная задача I имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^4(\Omega))$, $u_t(x,t) \in L_2(0,T;W_2^3(\Omega))$, $u_{tt}(x,t) \in L_2(Q)$, $q(t) \in L_2([0,T])$.

Доказательство. Пусть ε есть положительное число. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_{tt} - a\Delta u_t + \Delta^2 u + [p(t) + G_M(\widetilde{\varphi}(t,u))]\,u + \varepsilon\Delta^2 u_t = f(x,t) \tag{14}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3). Разрешимость данной задачи нетрудно доказать, вновь используя метод неподвижной точки и теорему Шаудера. Далее, вновь используя обобщенную лемму Гроноулла, нетрудно получить, что функция $\widetilde{\varphi}(t,u)$ будет ограниченной.

Выбирая параметр M достаточно большим, получим, что решение $u(x,t)$ задачи (14), (2), (3) будет решением уравнения

$$u_{tt} - a\Delta u_t + \Delta^2 u + [p(t) + \varphi(t,u)]u + \varepsilon\Delta^2 u_t = f(x,t). \tag{15}$$

Из сказанного выше следует, что семейство задач (15), (2), (3) порождает семейство функций $\{u^\varepsilon(x,t)\}$, принадлежащих пространству V_1, причем для этого семейства будет выполняться априорная оценка

$$\int\limits_\Omega [\Delta u_t^\varepsilon(x,t)]^2\,dx + \int\limits_\Omega [\Delta^2 u^\varepsilon(x,t)]^2\,dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (\Delta u_{x_i\tau}^\varepsilon)^2\,dx\,d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (u_{\tau\tau}^\varepsilon)^2\,dx\,d\tau + \varepsilon\int\limits_0^t \int\limits_\Omega (\Delta^2 u_\tau^\varepsilon)^2\,dx\,d\tau \le R,$$

постоянная R в которой определяется лишь функциями $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\mu(t)$, $N(x)$, числом T и областью Ω. Из этой оценки, из свойства рефлексивности пространства L_2 и из теорем вложения (см. [21]) вытекает, что существует последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ положительных чисел и функций $u(x,t)$ таких, что

$$\varepsilon_m \to 0 \quad \textit{при} \quad m \to \infty,$$
$$\Delta u_t^{\varepsilon_m}(x,t) \underset{m\to\infty}{\to} \Delta u_t(x,t) \quad \textit{слабо в пространстве} \quad L_2(Q),$$
$$\Delta^2 u^{\varepsilon_m}(x,t) \underset{m\to\infty}{\to} \Delta^2 u(x,t) \quad \textit{слабо в пространстве} \quad L_2(Q),$$
$$u_{tt}^{\varepsilon_m}(x,t) \underset{m\to\infty}{\to} u_{tt}(x,t) \quad \textit{слабо в пространстве} \quad L_2(Q),$$
$$\varepsilon_m \Delta^2 u_t^{\varepsilon_m}(x,t) \underset{m\to\infty}{\to} 0 \quad \textit{слабо в пространстве} \quad L_2(Q),$$
$$u_t^{\varepsilon_m}(x,t) \underset{m\to\infty}{\to} u_t(x,t) \quad \textit{сильно в пространствах} \quad L_2(Q) \quad \textit{и} \quad L_2(S),$$
$$\Delta u^{\varepsilon_m}(x,t) \underset{m\to\infty}{\to} \Delta u(x,t) \quad \textit{сильно в пространствах} \quad L_2(Q) \quad \textit{и} \quad L_2(S).$$

Покажем, что выполняется также сходимость

$$\widetilde{\varphi}(t,u^{\varepsilon_m})u^{\varepsilon_m} \underset{m\to\infty}{\to} \widetilde{\varphi}(t,u)u \quad \textit{слабо в пространстве} \quad L_2(Q).$$

Имеем

$$\int\limits_Q [\widetilde{\varphi}(t,u^{\varepsilon_m})u^{\varepsilon_m} - \widetilde{\varphi}(t,u)u]\eta\,dx\,dt = \int\limits_Q [\widetilde{\varphi}(t,u^{\varepsilon_m})(u^{\varepsilon_m} - u)\eta\,dx\,dt+$$
$$+\int\limits_Q [\widetilde{\varphi}(t,u^{\varepsilon_m}) - \widetilde{\varphi}(t,u)]u\eta\,dx\,dt = I_{1m} + I_{2m}.$$

Поскольку функция $|\widetilde{\varphi}(t,u^{\varepsilon_m})|$ ограничена, и поскольку $u^{\varepsilon_m}(x,t) \underset{m\to\infty}{\to} u(x,t)$ сильно в пространстве $L_2(Q)$, то выполняется $I_{1m} \to 0$ при $m \to \infty$. Далее, справедливы равенства

$$\widetilde{\varphi}(t,u^{\varepsilon_m}) - \widetilde{\varphi}(t,u) = \tfrac{1}{\mu(t)}\Bigg[a\int\limits_\Omega N(x)\Delta(u_t^{\varepsilon_m} - u_t)\,dx -$$
$$-\int\limits_\Omega N(x)\Delta^2(u^{\varepsilon_m} - u)\,dx\Bigg] = \tfrac{1}{\mu(t)}\Bigg[a\int\limits_\Omega \Delta N(x)(u_t^{\varepsilon_m} - u_t)\,dx +$$
$$+a\int\limits_\Gamma \tfrac{\partial N(x)}{\partial\nu}(u_t^{\varepsilon_m} - u_t)\,ds - \int\limits_\Omega \Delta N(x)\Delta(u^{\varepsilon_m} - u)\,dx - \int\limits_\Gamma \tfrac{\partial N(x)}{\partial\nu}\Delta(u^{\varepsilon_m} - u)\,ds\Bigg].$$

Отсюда

$$I_{2m} = \int\limits_Q\left(\tfrac{a}{\mu(t)}\int\limits_\Omega \Delta N(y)[u_t^{\varepsilon_m}(y,t) - u_t(y,t)]\,dy\right)u\eta\,dx\,dt+$$
$$+\int\limits_Q \tfrac{a}{\mu(t)}\left(\int\limits_\Gamma \tfrac{\partial N(y)}{\partial\nu}[u_t^{\varepsilon_m}(y,t) - u_t(y,t)]\,ds_y\right)u\eta\,dx\,dt-$$
$$-\tfrac{1}{\mu(t)}\int\limits_Q\left(\int\limits_\Omega \Delta N(y)\Delta(u^{\varepsilon_m}(y,t) - u(y,t))\,dy\right)u\eta\,dx\,dt-$$
$$-\tfrac{1}{\mu(t)}\int\limits_Q\left(\int\limits_\Gamma \tfrac{\partial N(y)}{\partial\nu}\Delta(u^{\varepsilon_m}(y,t) - u(y,t))\,ds_y\right)u\eta\,dx\,dt =$$
$$= I_{2m}^1 + I_{2m}^2 + I_{2m}^3 + I_{2m}^4.$$

Оценим слагаемое I^1_{2m}:

$$|I^1_{2m}| \le \frac{a}{\mu_0}\int\limits_0^T \left(\left|\int\limits_\Omega \Delta N(y)[u_t^{\varepsilon_m}(y,t)-u_t(y,t)]\,dy\right|\left(\int\limits_\Omega |u||\eta|\,dx\right)\right)dt \le$$

$$\le \frac{a}{\mu_0}\int\limits_0^T\left\{\left(\int\limits_\Omega[\Delta N(y)]^2\,dy\right)^{\frac12}\left(\int\limits_\Omega[u_t^{\varepsilon_m}(y,t)-u_t(y,t)]^2\,dy\right)^{\frac12}\left(\int\limits_\Omega u^2(x,t)\,dx\right)^{\frac12}\left(\int\limits_\Omega \eta^2(x,t)\,dx\right)^{\frac12}\right\}dt.$$

Заметим, что предпоследний множитель подинтегрального выражения здесь ограничен. Отсюда

$$|I^1_{2m}| \le A\int\limits_0^T\left(\int\limits_\Omega[u_t^{\varepsilon_m}(y,t)-u_t(y,t)]^2\,dx\right)^{\frac12}\left(\int\limits_\Omega \eta^2(x,t)\,dx\right)^{\frac12}dt \le$$

$$\le A\left(\int\limits_0^T\int\limits_\Omega[u_t^{\varepsilon_m}(y,t)-u_t(y,t)]^2\,dx\,dt\right)^{\frac12}\left(\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \eta^2(x,t)\,dx\,dt\right)^{\frac12}$$

(число A здесь определяется числами a, μ_0, C_1, R, а также функцией $N(x)$).

Поскольку имеет место сильная в пространстве $L_2(Q)$ сходимость последовательности $\{u_t^{\varepsilon_m}(x,t)\}$ к функции $u_t(x,t)$, то из последнего неравенства вытекает сходимость $I^1_{2m}\to 0$ при $m\to\infty$. Аналогично показывается, что выполняется

$$I^2_{2m}\to 0,\quad I^3_{2m}\to 0,\quad I^4_{2m}\to 0\quad \textit{при}\quad m\to\infty.$$

Из доказанных сходимостей и следует сходимость требуемая:

$$\widetilde{\varphi}(t,u^{\varepsilon_m})u^{\varepsilon_m}\to\widetilde{\varphi}(t,u)u\quad \textit{при}\quad m\to\infty\quad \textit{слабо в пространстве}\quad L_2(Q).$$

Очевидно, что для предельной функции $u(x,t)$ будет выполняться уравнение

$$u_{tt}-a\Delta u_t+\Delta^2u+[p(t)+\widetilde{\varphi}(t,u)]u=f(x,t).$$

Положим $q(t)=p(t)+\widetilde{\varphi}(t,u)$. Функции $u(x,t)$ и $q(t)$ и определяют искомое решение обратной задачи I – функции $u(x,t)$ и $q(t)$ связаны в цилиндре Q уравнением (1), условия (2) и (3) выполняются по построению. выполнение условия (4) показывается стандартным образом, принадлежность функций $u(x,t)$ и $q(t)$ требуемым классам очевидна. □

Замечание 1. Выполнение последних неравенств из условий теорем 1 и 2 имеет место, например, если число T мало, или же малы числа N_1 или N_0.

3. Разрешимость обратной задачи II

Пусть $w(x,t)$ есть функция из пространства V_1. Определим функцию $\varphi_1(t,w)$:

$$\varphi_1(t,w)=\frac{1}{\mu'(t)}\left[a\int\limits_\Omega N(x)\Delta w_t(x,t)\,dx-\int\limits_\Omega N(x)\Delta^2w(x,t)\,dx\right].$$

Далее, положим

$$p_1(t)=\tfrac{F(t)-\mu''(t)}{\mu'(t)},\quad \mu_1=\min_{0\le t\le T}\mu'(t),\quad \overline{p}_1=\operatorname*{vraimin}_{0\le t\le T}p_1(t),$$

$$N_2=\left\{\int\limits_\Omega[\Delta^2u_0(x)]^2\,dx+\int\limits_\Omega[\Delta u_1(x)]^2\,dx+\frac1a\sum_{i=1}^n\int\limits_Q f_{x_i}^2\,dx\,dt\right\}^{\frac12}.$$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия*

$$N(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \mu(t) \in C^2([0,T]), \quad f(x,t) \in L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega));$$
$$a > 0, \quad \mu_1 > 0, \quad \overline{p}_1 > 0;$$
$$N(x) = 0 \quad \textit{при} \quad x \in \Gamma;$$
$$u_0(x) \in W_2^4(\Omega), \quad u_1(x) \in W_2^2(\Omega);$$
$$u_0(x) = \Delta u_0(x) = u_1(x) = 0 \quad \textit{при} \quad x \in \Gamma;$$
$$\int\limits_\Omega N(x) u_0(x)\, dx = \mu(0), \quad \int\limits_\Omega N(x) u_1(x)\, dx = \mu'(0);$$
$$\frac{(a+1)N_0 N_2}{\mu_1} \leq \overline{p}_1.$$

Тогда обратная задача II имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^4(\Omega))$, $u_t(x,t) \in L_2(0,T; W_2^3(\Omega))$, $u_{tt}(x,t) \in L_2(Q)$, $q(t) \in L_2([0,T])$.

Доказательство этой теоремы проводится вновь с помощью метода срезок и метода регуляризации; непосредственная техника вполне соответствует технике доказательства теорем 1 и 2, а также технике, использованной в работе [15].

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект 15-01-06582.

Литература

1. Prilepko, A.I. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics / A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin. – N.-Y.: Marcel Dekker, 1999.
2. Denisov, A.M. Elements of the Theory of Inverse Problems / A.M. Denisov. – Utrecht: VSP, 1999.
3. Kozhanov, A.I. Composite Types Equations and Inverse Problems / A.I. Kozhanov. – Utrecht: VSP, 1999.
4. Anikonov, Yu.E. Inverse Problems for Kinetic and Other Evolution Equations / Yu.E. Anikonov. – Utrecht: VSP, 2001.
5. Lorenzi, A. An Introduction to Mathematical Problems via Functional Analysis / A. Lorenzi. – Utrecht: VSP, 2001.
6. Romanov, V.G. Investigation Methods for Inverse Problems / V.G. Romanov. – Utrecht: VSP, 2002.
7. Belov, Yu.Ya. Inverse Problems for Partial Differential Equations / Yu.Ya. Belov. – Utrecht: VSP, 2002.
8. Lavrentiev, M.M. Inverse Problems of Mathematical Physics / M.M. Lavrentiev. – Utrecht: VSP, 2003.
9. Ivanchov, M. Inverse Problems for Equations of Parabolic Type / M. Ivanchov. – Lvev: WNTL Publisher, 2003.
10. Isakov, V. Inverse Problems for Partial Differential Equations / V. Isakov. – N.-Y.: Springer, 2006.
11. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Сиб. кн. изд-во, 2009.

12. Cannon, J.R. Determination of a Parameter $p(t)$ in Some Quasilinear Parabolic Differential Equations / J.R. Cannon, Y. Lin // Inverse Problems. – 1988. – V. 4. – P. 35–45.
13. Іванчов, М.І. Обернена задача з вильною межею для рівняння теплопроводності / М.І. Іванчов // Украинский математический журнал. – 2003. – Т. 55, № 7. – С. 901–910.
14. Slodička, M. Determination of a Solely Time-Dependent Source in a Semilinear Parabolic Problem by Means of Boundary Measurements / M. Slodička // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2015. – V. 289. – P. 433–440.
15. Кожанов, А.И. Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени / А.И. Кожанов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2005. – Т. 45, № 12. – С. 2168–2184.
16. Кожанов, А.И. О разрешимости обратной задачи нахождения старшего коэффициента в уравнении составного типа / А.И. Кожанов // Вестник ЮУрГУ. Математическое моделирование и программирование. – 2008. – № 15 (115), вып. 1. – С. 27–36.
17. Кожанов, А.И. О разрешимости обратных задач восстановления коэффициентов в уравнениях составного типа / А.И. Кожанов // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия Математика, механика, информатика. – 2008. – Т. 8, вып. 3. – С. 81–99.
18. Кожанов, А.И. О разрешимости некоторых нелокальных и связанных с ними обратных задач для параболических уравнений / А.И. Кожанов // Математические заметки Якутского государственного университета. – 2011. – Т. 18, вып. 2. – С. 64–78.
19. Телешева, Л.А. Обратная задача для параболических уравнений высокого порядка: случай неизвестного коэффициента, зависящего от времени / Л.А. Телешева // Вестник БГУ. Математика и информатика. – 2010. – № 9. – С. 175–182.
20. Телешева, Л.А. О разрешимости обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка с неизвестным коэффициентом при производной по времени / Л.А. Телешева // Математические заметки Якутского государственного университета. – 2011. – Т. 18, вып. 2. – С. 180–201.
21. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1973.
22. Якубов, С.Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения / С.Я. Якубов. – Баку: Элм, 1995.
23. Треногин, Б.П. Функциональный анализ / Б.П. Треногин. – М.: Наука, 1980.
24. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Физматлит, 2002.
25. Амандус, Н.Е. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ч. 1. / Н.Е. Амандус, А.И. Кожанов, И.В. Шваб. – Новосибирск: НГУ, 2008.

Александр Иванович Кожанов, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, лаборатория дифференциальных и разностных уравнений, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (г. Новосибирск, Российская Федерация), kozhanov@math.nsc.ru.

Любовь Александровна Телешева, старший преподаватель, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений, Бурятский государственный университет (г. Улан-Удэ, Российская Федерация, love_20_09@mail.ru.

Поступила в редакцию 28 июня 2016 г.

MSC 35M20, 35R30 DOI: 10.14529/mmp170202

NONLINEAR INVERSE PROBLEMS WITH INTEGRAL OVERDETERMINATION FOR NONSTATIONARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HIGH ORDER

***A.I. Kozhanov*[1], *L.A. Telesheva*[2]**
[1]Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russian Federation
[2]Buryat State University, Ulan-Ude, Russian Federation
E-mail: kozhanov@math.nsc.ru, love_20_09@mail.ru

Nonlinear inverse coefficient problems for nonstationary higher order differential equations of pseudohyperbolic type are the object of research. More precisely, we study the problems of determining both the solution of the corresponding equation, an unknown coefficient at the solution or at the time derivative of the solution in the equation. A distinctive feature of these problems is the fact that the unknown coefficient is a function of time only. Integral overdetermination is used as an additional condition. We prove the existence theorems of regular solutions (those solutions that have all generalized derivatives in the sense of S.L. Sobolev). The technique of the proof relies on the transition from the original inverse problem to a new direct problem for an auxiliary integral-differential equation, and then on the proof of solvability of the latter and construction of some solution of the original inverse problem from a solution of the auxiliary problem.

Keywords: pseudohyperbolic equations of higher order; inverse problem; regular solution; existence.

References

1. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics.* N.-Y., Marcel Dekker, 1999.
2. Denisov A.M. *Elements of the Theory of Inverse Problems.* Utrecht, VSP, 1999. DOI: 10.1515/9783110943252
3. Kozhanov A.I. *Composite Types Equations and Inverse Problems.* Utrecht, VSP, 1999. DOI: 10.1515/9783110943276
4. Anikonov Yu.E. *Inverse Problems for Kinetic and Other Evolution Equations.* Utrecht, VSP, 2001. DOI: 10.1515/9783110940909
5. Lorenzi A. *An Introduction to Mathematical Problems via Functional Analysis.* Utrecht, VSP, 2001.
6. Romanov V.G. *Investigation Methods for Inverse Problems.* Utrecht, VSP, 2002. DOI: 10.1515/9783110943849
7. Belov Yu.Ya. *Inverse Problems for Partial Differential Equations.* Utrecht, VSP, 2002. DOI: 10.1515/9783110944631
8. Lavrentiev M.M. *Inverse Problems of Mathematical Physics.* Utrecht, VSP, 2003.
9. Ivanchov M. *Inverse Problems for Equations of Parabolic Type.* Lviv, WNTL Publishers, 2003.
10. Isakov V. *Inverse Problems for Partial Differential Equations.* N.-Y., Springer, 2006.
11. Kabanihin S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and Ill-Posed Problems]. Novosibirsk, Siberian publishing, 2009.

12. Cannon J.R., Lin Y. Determination of a Parameter $p(t)$ in Some Quasilinear Parabolic Differential Equations. *Inverse Problems*, 1988, vol. 4, no. 1, pp. 35–45. DOI: 10.1088/0266-5611/4/1/006
13. Ivanchov M.I. Inverse Problem with Free Boundary for Heat Equation. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2003, vol. 55, issue 7, pp. 1086–1098. DOI:10.1023/B:UKMA.0000010607.28568.a7
14. Slodička M. Determination of a Solely Time-Dependent Source in a Semilinear Parabolic Problem by Means of Boundary Measurements. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2015, vol. 289, pp. 433–440. DOI: 10.1016/j.cam.2014.10.004
15. Kozhanov, A.I. Parabolic Equations with an Unknown Time-Dependent Coefficient. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2005, vol. 45, no. 12, pp. 2085–2101.
16. Kozhanov A.I. [On the Solvability of the Inverse Problem of the Occurrence of the Senior Comfect in an Equation of the Compilation Type]. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2008, no. 15 (115), issue 1, pp. 27–36. (in Russian)
17. Kozhanov A.I. [Solvability of Inverse Problems for Recovery of Coefficients in Composite Type Equations]. *Journal of Mathematical Sciences*, 2008, vol. 8, no. 3, pp. 81–99. (in Russian)
18. Kozhanov A.I. [On the Solvability of Certain Nonlocal and Related Inverse Problems for Parabolic Equations]. *Matematicheskie zametki Jakutskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2011, vol. 18, issue 2, pp. 64–78. (in Russian)
19. Telesheva L.A. [An Inverse Problem for Higher-Order Parabolic Equations: the Case an Unknown Time-Dependent Coefficient]. *BSU Bulletin. Series: Mathematics, Informatics*. 2010, no. 9, pp. 175–182. (in Russian)
20. Telesheva L.A. [On the Solvability of the Inverse Problem for a High-Order Parabolic Equation with an Unknown Coefficient for the Time Derivative]. *Matematicheskie zametki Jakutskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2011, vol. 18, issue 2, pp. 180–201. (in Russian)
21. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, N.-Y., London, Academic Press, 1968.
22. Jakubov S.Ya. *Linejnye differencial'no-operatornye uravnenija i ih prilozhenija* [Linear Differential-Operator Equations and Their Applications]. Baku, Elm, 1995.
23. Trenogin B.P. *Funkcional'nyj analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1980.
24. Demidovich B.P. *Lekcii po matematicheskoj teorii ustojchivosti* [Lectures on the Mathematical Theory of Stability]. Moscow, Fizmatlit, 2002.
25. Amandus N.E., Kozhanov A.I., Shvab I.V. *Obyknovennye differencial'nye uravnenija. Ch. 1* [Ordinary Differential Equations. Vol. 1]. Novosibirsk, Novosibirsk State University, 2008.

Received June 28, 2016