ОБЗОРНЫЕ СТАТЬИ

УДК 517.9 **DOI: 10.14529/mmp150201**

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ЗАДАЧИ ШОУОЛТЕРА – СИДОРОВА ДЛЯ МОДЕЛЕЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

А.В. Келлер, С.А. Загребина

В настоящее время активно развиваются исследования математических моделей соболевского типа. В решении прикладных задач значимыми являются результаты, позволяющие получать их численное решение. Начальное условие Шоуолтера – Сидорова стало не просто обобщением задачи Коши для моделей соболевского типа, а условием, позволившим при нахождении приближенного решения избегать проверки согласования начальных данных. Данная статья представляет обзор ряда результатов челябинской математической школы по уравнениям соболевского типа, полученных с использованием либо непосредственно условия Шоуолтера – Сидорова, либо его обобщений.

Статья состоит из семи параграфов. В первом приведены результаты исследований разрешимости задачи оптимального измерения в модели Шестакова – Свиридюка. Во втором параграфе представлен краткий обзор ныне существующих подходов к понятию белого шума. Третий параграф содержит результаты разрешимости ослабленной задачи Шоуолтера – Сидорова для системы леонтьевского типа с аддитивным «белым шумом». В четвертом параграфе приводится результат об однозначной разрешимости многоточечной начально-конечной задачи для уравнения соболевского типа первого порядка. Результатам исследования оптимального управления решениями такой задачи посвящен пятый параграф. Шестой и седьмой параграфы содержат результаты, связанные с исследованиями оптимальных управлений решениями задачи Шоуолтера – Сидорова и начально-конечной задачи для уравнений соболевского типа второго порядка соответственно.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа; системы леонтьевского типа; оптимальное управление; задача Шоуолтера – Сидорова; (многоточечное) начально-конечное условие; оптимальное измерение.

Введение

В рамках создания общей теории неклассических моделей, имеющих технические, физические и экономические приложения, сводящихся к уравнениям соболевского типа или системам леонтьевского типа (конечномерный частный случай уравнений соболевского типа), возникла необходимость создания численных алгоритмов для проведения вычислительных экспериментов. Отметим, что использование традиционного начального условия Коши накладывает ограничения при численном решении как начальных задач, так и задач оптимального управления, т.к. требуется согласование начальных данных, проверка которых вызывает значительные трудности. Применение начального условия Шоуолтера – Сидорова при численном решении снимает необходимость ограничений на начальные условия и размерность исходных данных [1]. Кроме того, по мнению ряда авторов (см. обзор [2]), более естественным, чем условие Коши для уравнений соболевского типа, является условие Шоуолтера – Сидорова, или его обобщение – начально-конечное условие [3]. В нашей статье приведен обзор результатов исследований, полученных в период с 2010 года челябинской научной школой Г.А. Свиридюка в области уравнений соболевского типа и систем леонтьевского типа.

Система леонтьевского типа

$$L\dot{x} = Mx + f \tag{1}$$

при начальных условиях Шоуолтера – Сидорова

$$\left[(\mu L - M)^{-1}L\right]^{p+1}(x(0) - x_0) = 0 \tag{2}$$

моделирует измерительное устройство (ИУ), где $f = Bu$. Впервые А.Л. Шестаковым и Г.А. Свиридюком была сформулирована задача определения входящего в ИУ сигнала u как задача оптимального управления системами леонтьевского типа, или *задача оптимального измерения* [4]. В дальнейшем модели, в основе которых лежала эта задача, стали называться моделями Шестакова – Свиридюка. Но основе методов изучения таких моделей были построены численные алгоритмы восстановления сигнала, искаженного как механической инерционностью [5], так и резонансами в цепях ИУ [6]. Кроме того, представленные методы и алгоритмы были применены к задаче оптимального измерения покупательского поведения. В основе численного метода исследования математической модели ИУ и решения задачи оптимального измерения с учетом инерционности лежат алгоритмы численного решения систем леонтьевского типа и класса задач оптимального управления для систем леонтьевского типа с начальными условиями Шоуолтера – Сидорова, разработанные А.В. Келлер [1]. Отметим, что здесь предполагается детерминированность входного сигнала $u = u(t)$, т.е. отсутствие случайных возмущений, например, аддитивного белого шума. При изучении модели с детерминированным внешним сигналом очень полезными оказались методы и результаты теории уравнений соболевского типа и вырожденных групп операторов [7], поскольку они позволили создать эффективный вычислительный алгоритм [1].

В настоящее время проводятся исследования моделей Шестакова – Свиридюка, в которых наряду с детерминированным сигналом предполагается наличие белого шума, как аддитивного [8, 9], так и мультипликативного [10, 11]. Поскольку модель представлена вырожденной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, то к ней трудно применимы существующие ныне подходы Ито – Стратоновича – Скорохода и Мельниковой – Филинкова – Альшанского, в которых белый шум понимается как обобщенная производная винеровского процесса. Вместо этого предложена новая концепция «белого шума», равного симметрической производной в среднем (производной Нельсона – Гликлиха [12, 13]) винеровского процесса, причем подмечено, что данная производная совпадает с «обычной» производной броуновского движения теории Эйнштейна – Смолуховского [14].

Также были рассмотрены линейные уравнения соболевского типа первого порядка

$$L\dot{u} = Mu + f \tag{3}$$

с начально-конечным условием [3]

$$P_0(u(\tau_0) - u_0) = P_1(u(\tau_1) - u_1) = 0, \tag{4}$$

причем даже изучено оптимальное управление решениями этих задач [15]. Помимо этого, были рассмотрены более общие, многоточечные начально-конечные условия

$$P_j(u(\tau_j) - u_j) = 0, \quad j = \overline{0,n}. \tag{5}$$

Здесь P_j, $j = \overline{0,n}$ – специальным образом построенные относительно спектральные проекторы [16]. Заметим еще, что если в (5) взять $j = 0$, то это условие ничто иное, как условие Шоуолтера – Сидорова.

Также были получены результаты исследования полного уравнения соболевского типа высокого порядка

$$Au^{(n)} = B_{n-1}u^{(n-1)} + ... + B_0u + f, \tag{6}$$

для которого условие Шоуолтера – Сидорова [17] имеет вид

$$P_0(u^{(m)}(0) - u_m) = 0, m = 0, ..., n-1, \tag{7}$$

а начально-конечное условие [18] представимо в виде

$$P_0(u^{(m)}(0) - u_m^0) = 0,\ P_1(u^{(m)}(\tau) - u_m^\tau) = 0,\ m = 0, ..., n-1, \tag{8}$$

причем, помимо однозначной разрешимости поставленых задач, исследуется и оптимальное управление их решениями. Причем $P_j,\ j = 0, 1$, аналогично предыдущему случаю, специальным образом построенные относительно спектральные проекторы.

Статья состоит из семи параграфов. В первом приведены результаты исследований разрешимости задачи оптимального измерения в модели Шестакова – Свиридюка, выполненных А.В. Келлер и ее ученицей [5]. Во втором параграфе представлен краткий обзор ныне существующих подходов к понятию белого шума, почерпнутый в [14]. Третий параграф содержит результаты разрешимости ослабленной задачи Шоуолтера – Сидорова для системы леонтьевского типа с аддитивным «белым шумом», полученные А.Л. Шестаковым и Г.А. Свиридюком [14]. В четвертом параграфе приводится результат, доказанный С.А. Загребиной, об однозначной разрешимости многоточечной начально-конечной задачи для уравнения соболевского типа первого порядка [3]. Результатам исследования оптимального управления решениями такой задачи, полученным Н.А. Манаковой и ее учеником, посвящен следующий, пятый параграф [15]. Шестой и седьмой параграфы содержат результаты исследования А.А. Замышляевой и ее ученицы, связанные с исследованиями оптимальных управлений решениями задачи Шоуолтера – Сидорова [17] и начально-конечной задачи [19] для уравнений соболевского типа второго порядка соответственно.

Эта статья написана к юбилею одного из родоначальников условия Шоуолтера – Сидорова – профессора Николая Александровича Сидорова. Авторы от всей души желают выдающемуся математику, создателю одной из крупнейших научных школ по уравнениям соболевского типа и прекрасному человеку новых творческих успехов и многих лет счастливой жизни.

1. Условие Шоуолтера – Сидорова в теории оптимальных измерений

Пусть L и M – квадратные матрицы порядка n. Матрица M называется (L,p)-*регулярной*, если $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ такое, что $\det(\alpha L - M) \neq 0$, при этом $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ – порядок полюса в точке ∞ L–резольвенты $(\mu L - M)^{-1}$ матрицы M. Рассмотрим задачу Шоуолтера–Сидорова

$$\left[(\alpha L - M)^{-1} L\right]^{p+1} (x(0) - x_0) = 0 \tag{9}$$

для системы леонтьевского типа

$$L\dot{x} = Mx + f, \tag{10}$$

где $\det L = 0$, $\alpha \in \rho^L(M)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, вектор-функция $f : [0, \tau] \to \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{R}_+$. В конечномерном случае (L,p)-ограниченный оператор представляет собой (L,p)-регулярную матрицу. В свою очередь, случай (L,p)-радиальности оператора является более общим, по сравнению с (L,p)-ограниченностью оператора M, поэтому справедлива

Теорема 1. *Пусть матрица M (L,p)-регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, вектор-функция $f : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$. Тогда для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существует единственное решение задачи (9), (10), имеющее вид*

$$x(t){=}\lim_{k\to\infty} x_k(f,t){=}\lim_{k\to\infty}\left[-\sum_{q=0}^{p}\left(M^{-1}(\mathbb{I}-Q_k)L\right)^q M^{-1}(\mathbb{I}-Q_k)f^{(q)}(t)+X_k^t x_0+\int_0^t R_k^{t-s}Q_k f(s)ds\right], \tag{11}$$

где

$$\begin{gathered} X_k^t=\left[\left(L-tk^{-1}M\right)^{-1}L\right]^k, \quad Q_k=\left[kL_k^L(M)\right]^{p+1}, \\ R_k^t=\left[\left(L-tk^{-1}M\right)^{-1}L\right]^{k-1}\left(L-tk^{-1}M\right)^{-1}. \end{gathered} \tag{12}$$

Вектор-функция $x_k(f,t)$ является *приближенным решением задачи* (9), (10) при $t \in [0,1]$, $k > K$, где $K = \max\{k_1, k_2\}$:

$$k_1 > \frac{1}{|\alpha_{n-p}|}\sum_{i=0}^{n-p}|\alpha_i| + 1, \qquad k_2 > \frac{1}{|\alpha_{n-p}|\,p^p}\sum_{i=0}^{n-p}|\alpha_i|\,(p+1)^{n-i} + 1, \tag{13}$$

здесь $\alpha_i = (-1)^{n-i}\sum\limits_{r=1}^{C_n^{n-i}}\Delta_{n-i}^r$ – коэффициенты полинома $\det(\mu L - M)$ степени $(n-p)$, $i = \overline{0,n}$, Δ_{n-i}^r – определители, получаемые из определителя матрицы L путем замены $(n-i)$ столбцов соответствующими столбцами матрицы M, r – порядковый номер определителя, $(n-p) \le \mathrm{rank}L$.

Пусть теперь L, M и C – квадратные матрицы порядка n, причем, быть может, $\det L = 0$, матрица M – (L,p)-регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ – порядок полюса точки ∞ L-резольвенты матрицы M, $u : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{R}_+$. Рассмотрим *пространство состояний* $\chi = \{x \in L_2((0,\tau),\mathbb{R}^n) : \dot{x} \in L_2((0,\tau),\mathbb{R}^n)\}$, *пространство измерений* $\mathfrak{U} = \left\{u \in L_2((0,\tau),\mathbb{R}^n) : u^{(p+1)} \in L_2((0,\tau),\mathbb{R}^n)\right\}$ и *пространство наблюдений* $\mathfrak{Y} = C[\chi]$. Выделим в $\mathfrak{U}$ компактное выпуклое подмножество $\mathfrak{U}_\partial$ – *множество допустимых измерений.* В качестве допустимых измерений рассматриваются такие, что

$$\sum_{q=0}^{p+1}\int_0^\tau \left\|u^{(q)}(t)\right\|^2 dt \le d,$$

где $d = \mathrm{const}$ – предельно допустимое значение вектор-функции измерений. Требуется найти вектор-функцию $v \in \mathfrak{U}_\partial$, минимизирующую значение функционала

$$J(u) = \sum_{q=0}^{1}\int_0^\tau \left\|Cx^{(q)}(u,t) - y_0^{(q)}(t)\right\|^2 dt, \tag{14}$$

т.е.

$$J(v) = \min_{u\in\mathfrak{U}_\partial} J(u), \tag{15}$$

причем $x(v) \in \chi$ почти всюду на $(0,\tau)$ удовлетворяет системе леонтьевского типа

$$L\dot{x} = Mx + Bu \tag{16}$$

и при некоторых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \rho^L(M)$ – условию Шоуолтера – Сидорова

$$\left[(\alpha L - M)^{-1}L\right]^{p+1}(x(0) - x_0) = 0. \tag{17}$$

Здесь $x = col\,(x_1, \ldots, x_n)$ и $\dot{x} = col\,(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ – вектор-функции состояния и скорости изменения состояния ИУ соответственно; $y_0(t) = col\,(y_{01}(t), \ldots, y_{0n}(t))$ – наблюдение в моменты времени t, полученное в ходе натурного эксперимента; $u = col\,(u_1, \ldots, u_n)$ – вектор-функция измерений; $y = col\,(y_1, \ldots, y_n)$ – вектор-функция наблюдений; n – число параметров состояний системы; B – квадратная матрица порядка n, характеризующая взаимовлияние параметров измерения; матрицы M и L характеризуют взаимовлияние состояния и скоростей состояния ИУ соответственно; матрица C характеризует связь между состоянием системы и наблюдением; $\|\cdot\|$ – евклидова норма пространства $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2. *Пусть матрица M (L,p)–регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, причем $det M \neq 0$. Тогда для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathfrak{Y}$ существует единственное решение $(y, v) \in \mathfrak{Y} \times \mathfrak{U}_\partial$ задачи (14) – (17), где $y = Cx$, а $x(t)$ определен (11) при $f = Bu$.*

2. Концепции белого шума

Пусть L, M – квадратные матрицы порядка n, причем $\det L = 0$, а пучок $L + \lambda M$ p-регулярен. Приведем систему (1), воспользовавшись известной теорией Кронекера – Вейерштрасса (см. например [20], гл.12), к эквивалентной системе

$$\widetilde{L}\dot{\widetilde{x}} = \widetilde{M}\widetilde{x} + \widetilde{y}, \tag{18}$$

где матрицы $\widetilde{L} = \mathrm{diag}\{N_{\nu_1}, N_{\nu_2}, \ldots, N_{\nu_k}, \mathbb{I}_l\}$, $\widetilde{M} = \mathrm{diag}\{\mathbb{I}_m, S\}$, N_{ν_j} – жордановы клетки порядка ν_j, $j = \overline{1,k}$, с нулями на главной диагонали; $\mathbb{I}_l$ и $\mathbb{I}_m$ – единичные матрицы, $l = n - m$, $m = \sum\limits_{j=1}^{k} \nu_j$; S – квадратная матрица порядка l. В (18) m компонент вектор-функций $\widetilde{x} = \widetilde{x}(t)$ соответствуют выходному сигналу, а остальные компоненты характеризуют состояние ИУ; вектор-функция $\widetilde{y} = \widetilde{y}(t)$ моделирует входной сигнал. То же самое необходимо сказать про их прообразы из (1). Алгоритм сведения (1) к (18) в теории выглядит очень простым, однако весьма неустойчив в численной реализации. В отличие от предыдущего параграфа, где входной сигнал детерминирован, необходимо было изучить модель Шестакова – Свиридюка (18), где на входе не только полезный сигнал, но и БШ.

Принято считать, что история изучения БШ восходит к теории броуновского движения А. Эйнштейна и М. Смолуховского. Из этой теории следовало, что смещение частицы в броуновском движении пропорционально $\sqrt{t}$, где t – время. Поэтому скорость частицы пропорциональна $(2\sqrt{t})^{-1}$ и поэтому не определена в момент времени $t = 0$. Следующий шаг в этом направлении был сделан Н. Винером, который предположил, что смещение частицы определяется случайным процессом, впоследствии получившим его имя. Итак, *винеровским* называется случайный процесс $w(t)$, обладающий следующими свойствами:

(w1) $w(0) = 0$ почти наверное (п.н.), и выборочные траектории $w(t)$ п.н. непрерывны;

(w2) математическое ожидание $E(w(t)) = 0$, и автокорреляционная функция $E((w(t) - w(s))^2) = |t - s|$;

(w3) выборочные траектории $w(t)$ п.н. недифференцируемы при всех $t \in [0, +\infty)$ и на любом сколь угодно малом промежутке имеют неограниченную вариацию.

Обычно под *белым шумом* понимают обобщенную производную винеровского процесса (т.к. «обычной» производной в силу (w3) не существует). Именно в таком смысле БШ выступает, например, в линейных стохастических дифференциальных уравнениях вида

$$dx = (Sx + y)dt + A\delta w. \tag{19}$$

Здесь в правой части символом δw обозначен обобщенный дифференциал от винеровского процесса $w(t)$, т.е. БШ. Первым уравнения вида (19) начал изучать К. Ито, затем к исследованиям подключились Р.Л. Стратонович и А.А. Скороход. Их подходы различаются, главным образом, в трактовке интеграла $\int_0^\tau A\delta w(t)$, который возникает в правой части (19) после интегрирования. В настоящее время данный подход распространен и на уравнения в частных производных. Кроме того, в последнее время в школе И.В. Мельниковой сложилось и активно развивается новое направление теории стохастических дифференциальных уравнений. Здесь уравнение (19) понимается в виде

$$\dot{x} = Sx + y + \dot{w}, \tag{20}$$

где все производные рассматриваются в пространстве Шварца. Таким образом, обобщенная производная винеровского процесса в правой части (20) – аддитивный БШ.

Отметим еще, что обзор подходов Ито – Стратоновича – Скорохода и Мельниковой – Филинкова – Альшанского представлен в [14]. Однако их вряд ли возможно применить к изучению уравнений вида (1). Первый подход не применим потому, что уравнения (1) (или в эквивалентной форме (18)) разбиваются на две части в силу теории Кронекера – Вейерштрасса; одну из них можно решать интегрированием, как, например (19), зато другая решается *только* многократным дифференцированием, что достаточно затруднительно в силу свойства (w3). Второй подход не применим из-за того, что в теории оптимальных измерений приходится опираться на теорию оптимального управления решениями уравнений вида (1), а она существует пока только в рамках гильбертовых пространств, и ее распространение на локально-выпуклые пространства до сих пор не осуществлено.

А.Л. Шестаковым и Г.А. Свиридюком было предложено использовать вместо обобщенной производной винеровского процесса производную в среднем [14]. Основы теории таких производных заложил О. Нельсон [12], а саму теорию до ее нынешнего состояния развил Ю.Е. Гликлих [13]. Одним из важнейших объектов этой теории является симметрическая производная в среднем случайного процесса, называемая еще текущей скоростью этого процесса. В дальнейшем краткости ради именно эту производную будем называть *производной Нельсона – Гликлиха*. Будем, используя их обозначения, обозначать символами $D_S w(t)$ эту производную винеровского процесса $w(t)$.

Обсудим преимущества такой замены. Во-первых, производная Нельсона – Гликлиха в случае детерминированного (т.е. неслучайного) гладкого процесса совпадает с «обычной» производной точно так же как обобщенная производная совпадает с «обычной» производной гладкой функции. Во-вторых, производная Нельсона – Гликлиха винеровского процесса $w(t)$ посчитана и имеет следующий вид: $D_s w(t) = (2t)^{-1} w(t)$. Именно этот случайный процесс назван «белым шумом»(«БШ»), обращая внимание на кавычки. Как и обобщенная производная винеровского процесса, этот «БШ» в силу свойства (w2) имеет нулевое математическое ожидание. Наконец, в-третьих, если винеровский процесс $w(t)$ моделирует смещение частицы в броуновском движении, то, согласно теории Эйнштейна – Смолуховского, его выборочные траектории п.н. эквивалентны $\sqrt{t}$. Отсюда $D_S w(t)$ п.н. равно $(2\sqrt{t})^{-1}$, что просто-таки совпадает с «обычной» производной броуновского движения.

3. Ослабленная задача Шоуолтера – Сидорова для уравнений леонтьевского типа с аддитивным «белым шумом»

Пусть $\mathcal{P}(\mathfrak{I}_a^b \times \Omega) \equiv \mathcal{P}(\mathfrak{I}_a^b \times \Omega; \mathbb{R}^n)$ – множество случайных процессов со значениями в $\mathbb{R}^n$. Случайный процесс $\eta \in \mathcal{P}(\mathfrak{I}_a^b \times \Omega)$ будем обозначать символами $\eta = \eta(t)$, считая его зависимость от второй переменной $\omega \in \Omega$, имеющей место по умолчанию. Производную Нельсона – Гликлиха D_S (если она существует) случайного процесса η будем обозначать символом $\overset{\circ}{\eta}$, т.е. $D_S \eta = D_S \eta(t) = \overset{\circ}{\eta} = \overset{\circ}{\eta}(t)$. Подмножество (пространство Лебега) случайных процессов

$\mathcal{P}(\mathfrak{I}_a^b \times \Omega)$, имеющих п.н. непрерывно дифференцируемые до порядка k включительно (в смысле Нельсона – Гликлиха) траектории, обозначим через $L_q^k(\mathfrak{I}_a^b \times \Omega)$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Далее, пусть L и M – квадратные матрицы порядка n, $\det L = 0$, и пучок $\mu L - M$ p-регулярен. Рассмотрим систему леонтьевского типа

$$L \overset{\circ}{\eta} = M\eta + \overset{\circ}{w}, \tag{21}$$

где $\overset{\circ}{w} = (2t)^{-1} w(t)$ – «БШ». Случайный процесс $\eta \in L_1^1((0,\tau) \times \Omega)$ будем называть *решением системы (21)*, если п.н. все его траектории удовлетворяют (21) при всех $\tau \in (0, +\infty)$. Ослабленной (в смысле С.Г. Крейна) задачей Шоуолтера – Сидорова назовем следующую начальную задачу

$$\lim_{t \to 0+} [R_\alpha^L(M)]^{p+1}(\eta(t) - \xi_0) = 0, \tag{22}$$

где $R_\alpha^L(M) = (\alpha L - M)^{-1} L$ – правая L-резольвента матрицы M, $\alpha \in \rho^L(M)$ – L-резольвентное множество матрицы M. Отметим сразу, что, поскольку $\ker[R_\alpha^L(M)]^{p+1} = \ker P$, $\operatorname{im}[R_\alpha^L(M)]^{p+1} = \operatorname{im} P$, где $P = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma R_\mu^L(M) d\mu$ – проектор на $\mathbb{R}^n$, то задача (22) эквивалентна задаче

$$\lim_{t \to 0+} P(\eta(t) - \xi_0) = 0. \tag{23}$$

Итак, решение $\eta = \eta(t)$ системы (21) будем называть *решением задачи (21), (22)* (или, что эквивалентно, – (21), (23)), если оно п.н. удовлетворяет (22).

Наряду с проектором P введем в рассмотрение проектор $Q = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma L_\mu^L(M) d\mu$, где $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ – левая L-резольвента матрицы M, а $\gamma \in \mathbb{C}$ как и выше – замкнутый контур, ограничивающий L-спектр $\sigma^L(M)$ матрицы M.

Лемма 1. *Пусть пучок $\mu L - M$ p-регулярен, тогда* $\dim \ker P = \dim \ker Q$, $LP = QL$, $MP = QM$.

Ввиду p-регулярности пучка $\mu L - M$ можно, не теряя общности, считать $\det M \neq 0$. Действительно, сделав в (21) замену $\eta(t) = \omega(t) e^{\alpha t}$, где $\alpha \in \rho^L(M)$, придем к системе вида (21), причем в правой части будет матрица $M' = M - \alpha L$. Очевидно, $\det M' \neq 0$. Построим матрицу $(\mathbb{I}_n - P) M^{-1} (\mathbb{I}_n - Q) L (\mathbb{I}_n - P) \equiv H$.

Лемма 2. *Пусть пучок $\mu L - M$ p-регулярен,* $\det M \neq 0$, *тогда матрица H нильпотентна степени не выше p.*

Лемма 3. *Пусть пучок $\mu L - M$ p-регулярен, тогда существует квадратная матрица Λ порядка n такая, что $\Lambda Q L = L P \Lambda = \operatorname{diag}\{\mathbb{O}_m, \mathbb{I}_l\}$ с точностью до перестановки строчек, где $m = \dim \ker P$, $l = n - m$.*

Положим $S = \Lambda Q M$ и построим

$$e^{tS} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu.$$

Как нетрудно видеть, семейство $\{e^{tS} : t \in \mathbb{R}\}$ образует группу, причем ее единица $e^{tS}|_{t=0} = P$.

Теорема 3. *Пусть пучок $\mu L - M$ p-регулярен,* $\det M \neq 0$. *Тогда для любых $\xi_0 \in \mathcal{V}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ и $\tau \in (0, +\infty)$ существует решение $\eta \in L_1^1((0,\tau) \times \Omega)$ задачи (21), (22), причем все решения п.н. имеют вид*

$$\eta(t) = -\sum_{k=0}^{p} H^k M^{-1} (\mathbb{I}_n - Q) D_S^k \overset{\circ}{w}(t) + e^{tS}\xi_0 + \int_0^t e^{(t-s)S} \Lambda Q \overset{\circ}{w}(s) ds. \tag{24}$$

Здесь $H^0 = \mathbb{I}_n - P$ по построению, и $\eta \in L_1^1((0,\tau)\times\Omega)$ при всех $\tau \in (0,+\infty)$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что (24) является решением (21). Поскольку при действии проектором P на первое слагаемое (в действительности, – вычитаемое) в (24) мы получаем тождественный нуль при всех $t \in (0,\tau)$, то ясно, что (23), а тем самым и (22), тоже выполняется.

Пример 1. Одна из простейших моделей ИУ, рассмотренная в [4, 5], имеет применительно к рассмотренной здесь ситуации следующий вид

$$\overset{\circ}{\alpha}= A\alpha + \overset{\circ}{\omega},\ \beta = C\alpha. \tag{25}$$

Здесь случайный процесс $\alpha = \alpha(t)$ моделирует состояние ИУ, матрицы A и C – его устройство, $\beta = \beta(t)$ – наблюдаемый процесс, в данном случае, «БШ» $\overset{\circ}{\omega}=\overset{\circ}{\omega}(t)$. Положив $\eta = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\ldots,\beta_l)$, $L = \operatorname{diag}\{\mathbb{I}_l,\mathbb{O}_m\}$,

$$M = \begin{pmatrix} A & \mathbb{O} \\ C & -\mathbb{I}_m \end{pmatrix},$$

придем к системе (21) $\overset{\circ}{w}= (\overset{\circ}{\omega}_1,\ldots,\overset{\circ}{\omega}_l,\underbrace{0,\ldots,0}_{l})$. Как нетрудно заметить, во-первых, $\det M \neq 0$, поскольку $\det M = (-1)^m \det A$ и $\det A \neq 0$ по построению. А во-вторых, пучок $\mu L - M$ 0-регулярен. Проекторы $Q = L$,

$$P = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_l & \mathbb{O} \\ C & \mathbb{O}_m \end{pmatrix},$$

оператор $\Lambda = L$, группа разрешающих операторов

$$e^{tM} = \begin{pmatrix} e^{tA} & \mathbb{O} \\ Ce^{tA} & \mathbb{O}_m \end{pmatrix},$$

где $e^{tA} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_\gamma (\mu\mathbb{I}_l - A)^{-1}e^{\mu t}d\mu$, а контур γ ограничивает область, содержащую спектр $\sigma(A)$ матрицы A (кстати сказать, здесь $\sigma(A) = \sigma^L(M)$). В модели (25) изучим только наблюдение β, и, кроме того, по техническим причинам начальную случайную величину ξ_0 (в (22), (23)) можно положить равной нулю п.н.

Следствие 1. *Все наблюдения в модели (25) п.н. даются формулой*

$$\beta(t) = C\int_0^t e^{(t-s)A}\overset{\circ}{\omega}(s)ds,\ t \in \mathbb{R}_+. \tag{26}$$

Отсюда вытекают два важных вывода: во-первых, случайный процесс наблюдений $\beta(0) = 0$ п.н., и во-вторых, траектории $\beta(t)$ п.н. непрерывны.

4. Многоточечное начально-конечное условие для уравнений соболевского типа первого порядка

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор M сильно (L,p)-радиален [7]. Рассмотрим линейное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f. \tag{27}$$

Кроме того, пусть выполнено условие на относительный спектр оператора M

$$\left.\begin{array}{c}\sigma^L(M)=\bigcup\limits_{j=0}^{n}\sigma_j^L(M),\ n\in\mathbb{N},\text{ причем }\sigma_j^L(M)\neq\emptyset,\text{ существует}\\ \text{замкнутый контур }\gamma_j\subset\mathbb{C}\text{ и }\gamma_j=\partial D_j,\text{ где }D_j\supset\sigma_j^L(M),\text{ что}\\ \overline{D_j}\cap\sigma_0^L(M)=\emptyset\text{ и }\overline{D_k}\cap\overline{D_l}=\emptyset\text{ при всех }j,k,l=\overline{1,n},k\neq l.\end{array}\right\} \tag{28}$$

Тогда существуют *относительно спектральные проекторы* P, Q (см. [21]), а также P_j, Q_j, $j=\overline{1,n}$, [16], причем

$$P_j=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}(\mu L-M)^{-1}Ld\mu,\ Q_j=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}L(\mu L-M)^{-1}d\mu,\ j=\overline{1,n}.$$

Введем в рассмотрение подпространства $\mathfrak{U}^{1j}=\mathrm{im}P_j$, $\mathfrak{F}^{1j}=\mathrm{im}Q_j$, $j=\overline{0,n}$. Положим $P_0=P-\sum\limits_{j=1}^{n}P_j$, $P_0\in\mathcal{L}(\mathfrak{U})$ – проектор. По построению $\mathfrak{U}^1=\bigoplus\limits_{j=0}^{n}\mathfrak{U}^{1j}$ и $\mathfrak{F}^1=\bigoplus\limits_{j=0}^{n}\mathfrak{F}^{1j}$. Через L_{1j} обозначим сужение оператора L на $\mathfrak{U}^{1j}$, $j=\overline{0,n}$, а через M_{1j} обозначим сужение оператора M на $\mathrm{dom}M\cap\mathfrak{U}^{1j}$, $j=\overline{0,n}$. Поскольку, как нетрудно показать, $P_j\varphi\in\mathrm{dom}\,M$, если $\varphi\in\mathrm{dom}\,M$, то область определения $\mathrm{dom}\,M_{1j}=\mathrm{dom}\,M\cap\mathfrak{U}^{1j}$ плотна в $\mathfrak{U}^{1j}$, $j=\overline{0,n}$.

Теорема 4. (Обобщенная спектральная теорема) *Пусть операторы* $L\in\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ *и* $M\in\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, *а оператор M сильно (L,p)-радиален, причем выполнено условие* (28). *Тогда*
(i) *операторы* $L_{1j}\in\mathcal{L}(\mathfrak{U}^{1j};\mathfrak{F}^{1j})$, $M_{1j}\in\mathcal{L}(\mathfrak{U}^{1j};\mathfrak{F}^{1j})$, $j=\overline{0,n}$;
(ii) *существуют операторы* $L_{1j}^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F}^{1j};\mathfrak{U}^{1j})$, $j=\overline{0,n}$.

Итак, пусть выполнено условие (28), зафиксируем $\tau_j\in\mathbb{R}_+$, $(\tau_j<\tau_{j+1})$, $u_j\in\mathfrak{U}$, $j=\overline{0,n}$, возьмем $f\in C^\infty(\mathbb{R}_+;\mathfrak{F})$, $j=\overline{0,n}$. Рассмотрим *многоточечное начально-конечное условие*

$$P_j(u(\tau_j)-u_j)=0,\quad j=\overline{0,n} \tag{29}$$

для уравнения (27).

Определение 1. *Вектор-функцию* $u\in C([0,\tau_n];\mathfrak{U})\cap C^1((0,\tau_n);\mathfrak{U})$, *удовлетворяющую уравнению (27), назовем решением многоточечной начально-конечной задачи (27), (29), если она удовлетворяет уравнению (27), и условиям* $\lim\limits_{t\to\tau_0+}P_0(u(t)-u_0)=0$, $P_j(u(\tau_j)-u_j)=0$, $j=\overline{1,n}$.

Теорема 5. [16] *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, причем выполнено условие* (28). *Тогда для любых векторов* $u_j\in\mathfrak{U}$, *для любых вектор-функций* $f^0\in C^{p+1}((0,\tau);\mathfrak{F}^0)$, $f_j^1\in C([0,\tau_n];\mathfrak{F}_j^1)$, $j=\overline{1,n}$, *существует единственное решение* $u\in C([0,\tau_n];\mathfrak{U})\cap C^1((0,\tau_n);\mathfrak{U})$, *которое к тому же имеет вид*

$$u(t)=-\sum_{q=0}^{p}H^qM_0^{-1}\frac{d^q}{dt^q}f^0(t)+\sum_{j=0}^{n}\left(U_j^{t-\tau_j}u_{\tau_j}-\int_t^{\tau}R_{1j}^{t-s}f_j^1(s)ds\right). \tag{30}$$

Отметим, наконец, что многие физические, технические и технологические процессы и явления такие, как, например, плоскопараллельная термоконвекция вязкоупругой несжимаемой жидкости, моделируются *уравнениями соболевского типа* (27). При этом возникает необходимость осуществлять многочисленные наблюдения изучаемых процессов и явлений с различных точек и в различные моменты времени. Например, в целях предотвращения аварийных ситуаций, необходимо в различные моменты времени отслеживать выполнение технологии в различных точках при обеспечении непрерывности процесса термоконвекции. Полученные ре зультаты наблюдений позволяют, решив многоточечную начально-конечную задачу (27), (29), восстановить параметры изучаемых процессов [3, 16].

5. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнения соболевского типа первого порядка

Пусть $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{U}$ – гильбертовы пространства, операторы L, $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, причем оператор M (L,p)-ограничен, а оператор $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Y})$. Для уравнения соболевского типа

$$L\dot{x} = Mx + y + Bu \tag{31}$$

рассмотрена начально-конечная задача [3, 18],

$$P_{in}(x(0) - x_0) = 0, \quad P_{fin}(x(\tau) - x_\tau) = 0, \tag{32}$$

где $\tau \in \mathbb{R}_+$ (для определенности, вообще можно $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$), x_0, $x_\tau \in \mathfrak{X}$. Задача оптимального управления решениями задачи (31), (32), заключается в отыскании такой пары $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}$, для которой выполняется соотношение

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \inf_{(x,u)\in\mathfrak{X}\times\mathfrak{U}_{ad}} J(x, u). \tag{33}$$

Здесь $J(x, u)$ – некоторый специальным образом построенный функционал качества; управление $u \in \mathfrak{U}_{ad}$, где $\mathfrak{U}_{ad}$ – некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений $\mathfrak{U}$, а все $x \in \mathfrak{X}$ – решения задачи (31), (32). Таким образом, оптимальное управление решениями задачи (31) – (33) дает возможность минимизировать штрафные санкции.

Определение 2. *Вектор-функцию $x \in H^1(\mathfrak{X}) = \{x \in L_2(0, \tau; \mathfrak{X}) : \dot{x} \in L_2(0, \tau; \mathfrak{X})\}$ назовем сильным решением уравнения*

$$L\dot{x} = Mx + y, \tag{34}$$

если она п. в. на $(0, \tau)$ обращает его в тождество. Сильное решение $x = x(t)$ уравнения (34) назовем сильным решением начально-конечной задачи, если оно удовлетворяет (32) (см. [22]).

В силу непрерывности вложения $H^1(\mathfrak{X}) \hookrightarrow C([0, \tau]; \mathfrak{X})$ это определение корректно. Термин «сильное решение» введен для того, чтобы отличать решение уравнения (34) в данном смысле от решения (30), представленного в предыдущем параграфе, которое теперь уместно называть «классическим». Заметим, что классическое решение является также и сильным решением задачи (32), (34).

Была доказана [23] следующая

Теорема 6. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда существует единственное сильное решение задачи (32), (34) для любых $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$ и $f \in H^{p+1}(\mathfrak{Y}) =$*
$$= \left\{ v \in L_2(0, \tau; \mathfrak{Y}) : v^{(p+1)} \in L_2(0, \tau; \mathfrak{Y}), p \in \{0\} \cup \mathbb{N}; [v, w] = \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \left\langle v^{(q)}, w^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{Y}} dt \right\}.$$

Полученный результат был использован для решения задачи оптимального управления (31), (32). Введем в рассмотрение пространство управлений

$$H^{p+1}(\mathfrak{U}) = \{u \in L_2(0, \tau; \mathfrak{U}) : u^{(p+1)} \in L_2(0, \tau; \mathfrak{U}), p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}.$$

Пространство $H^{p+1}(\mathfrak{U})$ гильбертово, в силу гильбертовости $\mathfrak{U}$, со скалярным произведением

$$[v,w]=\sum_{q=0}^{p+1}\int_0^\tau \left\langle v^{(q)},w^{(q)}\right\rangle_{\mathfrak{U}} dt.$$

Выделим в пространстве $H^{p+1}(\mathfrak{U})$ замкнутое и выпуклое подмножество $H^{p+1}_\partial(\mathfrak{U})$ – *множество допустимых управлений*. Введем в рассмотрение $\mathfrak{Z}$ – некоторое гильбертово пространство наблюдений и оператор $C\in\mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Z})$, задающий наблюдение $z(t)=Cx(t)$. Заметим, что если $x\in H^1(\mathfrak{X})$, то $z\in H^1(\mathfrak{Z})$.

Определение 3. *Вектор-функцию $\hat u\in H^{p+1}_\partial(\mathfrak{U})$ назовем оптимальным управлением решениями задачи* (31), (32), *если выполнено (33), где все $x\in\mathfrak{X}$ – решения задачи* (31), (32).

Доказано существование единственного управления $\hat u\in H^{p+1}_\partial(\mathfrak{U})$, минимизирующего функционал стоимости

$$J(x,u)=\sum_{q=0}^{1}\int_0^\tau \|z^{(q)}-z_0^{(q)}\|^2_{\mathfrak{Z}}dt+\sum_{q=0}^{p+1}\int\limits_0^\tau \left\langle N_q u^{(q)},u^{(q)}\right\rangle_{\mathfrak{U}} dt, \tag{35}$$

где $N_q\in\mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $q=0,\,1,\,\ldots,\,p+1$, – самосопряженные и положительно определенные операторы, $z_0=z_0(t)$ – желаемое наблюдение. Справедлива

Теорема 7. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p\in\{0\}\cup\mathbb{N}$. Тогда для любых $y\in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$, $x_0,x_\tau\in\mathfrak{X}$ существует единственное оптимальное управление решениями задачи* (31), (32).

В случае $p=0$ справедливо необходимое и достаточное условие существования оптимального управления

Теорема 8. *Пусть оператор M $(L,0)$-ограничен. Тогда при любых $y\in H^1(\mathfrak{Y})$ и $x\in H^1(\mathfrak{X})$ оптимальное управление $\hat u\in H^1_\partial(\mathfrak{U})$ для задачи* (31), (32) *характеризуется соотношениями $-L^*\dot\xi=M^*\xi+C^*\Lambda(Cx(t,u)-z_0)$, $P^*_{in}\xi(\tau)=0$, $P^*_{fin}\xi(0)=0$, и для всех $u\in H^1_\partial(\mathfrak{U})$ выполняется неравенство*

$$\left\langle \Lambda^{-1}_{\mathfrak{U}}B^*\xi(t,\hat u),u(t)-\hat u(t)\right\rangle_{H^1(\mathfrak{Z})}+\sum_{q=0}^{1}\int\limits_0^\tau \left\langle N_q\hat u^{(q)}(t),u^{(q)}(t)-\hat u^{(q)}(t)\right\rangle_{\mathfrak{U}}\geq 0,$$

где $x(t,\hat u)\in H^1(\mathfrak{X})$, $\xi(t,\hat u)\in H^1(\mathfrak{Y}^*)$.

Подчеркнем, что также было доказано существование единственного сильного решения начально-конечной задачи для линейного неоднородного уравнения соболевского типа в случае относительно p-секториального оператора, существование единственного оптимального управления решениями рассматриваемой задачи и получены необходимые условия оптимальности управления в этом случае. Абстрактные теоретические результаты применены в исследованиях оптимального управления в моделях процессов, описываемых линейными уравнениями Хоффа [15] и Дзекцера [24], заданными на графе с начально-конечными условиями. Разработан и реализован с помощью комплекса программ для ЭВМ алгоритм численного метода решения поставленных задач.

6. Задача Шоуолтера – Сидорова для уравнения соболевского типа второго порядка

Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ – гильбертовы пространства, операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y})$, причем пучок $\vec{B}$ операторов $B_1,\ B_0$ является (A,p)-ограниченным. Для линейного неоднородного уравнения соболевского типа второго порядка

$$A\ddot{x} = B_1\dot{x} + B_0 x + y \tag{36}$$

рассмотрим задачу Шоуолтера – Сидорова

$$P(x(0) - x_0) = 0, \quad P(\dot{x}(0) - x_1) = 0, \tag{37}$$

где

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R^A_\mu(\vec{B})\mu A\, d\mu \in \mathfrak{X} - \text{ проектор.}$$

Имеет место однозначная разрешимость задачи Шоуолтера – Сидорова (37) для уравнения (36)

Теорема 9. [17] *Пусть пучок операторов $\vec{B}$ является (A,p)-ограниченным. Тогда для любых $x_0, x_1 \in \mathfrak{X}$ и вектор-функции $y \in C^{p+2}((-T,T);\mathfrak{Y})$ существует единственное решение $x \in C^2((-T,T);\mathfrak{X})$ задачи (36), (37) вида*

$$x(t) = -\sum_{q=0}^{p} K^2_q (B^0_0)^{-1}\frac{d^q}{dt^q}(\mathbb{I} - Q)y(t) + M^1(t)Px_0 + N^1(t)Px_1 + \int\limits_0^t N(t-s)(A^1)^{-1}Qy(s)\,ds,$$

где $M^1(t),\ N^1(t)$ – сужения вырожденных M- и N-функций на подпространство $\mathfrak{X}^1$ [25].

Определение 4. Вектор-функцию $x \in H^2(\mathfrak{X}) = \{x \in L_2(0,\tau;\mathfrak{X}) :\ \ddot{x} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{X})\}$ назовем *сильным решением уравнения (36)*, если она п.в. на промежутке $(0,\tau)$ обращает его в тождество. Сильное решение $x = x(t)$ уравнения (36) назовем *сильным решением задачи (36), (37)*, если оно удовлетворяет условиям (37).

Теорема 10. *Пусть пучок операторов $\vec{B}$ является (A,p)-ограниченным, $p \in \{0\}\cup\mathbb{N}$. Тогда существует единственное сильное решение задачи (36), (37) для любых $x_0,\ x_1 \in \mathfrak{X}$ и*

$$y \in H^{p+2}(\mathfrak{Y}) = \left\{ v \in L_2(0,\tau;\mathfrak{Y}) : v^{(p+2)} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{Y}), p \in \{0\}\cup\mathbb{N}; [v,w] = \sum_{q=0}^{p+2}\int\limits_0^\tau \langle v^{(q)}, w^{(q)}\rangle_{\mathfrak{Y}} dt \right\}.$$

Полученные результаты были применены для решения задачи оптимального управления решениями задачи Шоуолтера – Сидорова (37) для уравнения

$$A\ddot{x} = B_1\dot{x} + B_0 x + y + Cu. \tag{38}$$

Здесь задача оптимального управления заключается в отыскании пары $(\hat{x}, \hat{u})$, для которой выполняется соотношение

$$J(\hat{x},\hat{u}) = \inf_{(x,u)\in\mathfrak{X}\times\mathfrak{U}_{ad}} J(x,u), \tag{39}$$

где функционал качества задается следующим образом:

$$J(x,u) = \sum_{q=0}^{2}\int\limits_0^\tau \|x^{(q)} - \tilde{x}^{(q)}\|^2\,dt + \sum_{q=0}^{p+2}\int\limits_0^\tau \langle N_q u^{(q)}, u^{(q)}\rangle_{\mathfrak{U}}\,dt. \tag{40}$$

Здесь $N_q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $q = 0, 1, \ldots, p+2$, – самосопряженные и положительно определенные операторы, $\tilde{x}(t)$ – плановое состояние системы. Управление u принадлежит $\mathfrak{U}_{ad}$, где $\mathfrak{U}_{ad}$ – некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений $\mathfrak{U}$, а $x \in \mathfrak{X}$ – решение задачи (37), (38).

Введем в рассмотрение гильбертово (в силу гильбертовости пространства $\mathfrak{U}$) пространство управлений

$$H^{p+2}(\mathfrak{U}) = \{u \in L_2(0,\tau;\mathfrak{U}) : \ u^{(p+2)} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{U}), \ p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$$

со скалярным произведением $[v, w] = \sum\limits_{q=0}^{p+2} \int\limits_0^\tau \langle v^{(q)}, w^{(q)} \rangle_{\mathfrak{U}} \, dt$. Выделим в пространстве $H^{p+2}(\mathfrak{U})$ замкнутое и выпуклое подмножество $H^{p+2}_\partial(\mathfrak{U})$– *множество допустимых управлений.*

Определение 5. *Вектор-функцию $\hat{u} \in H^{p+2}_\partial(\mathfrak{U})$ назовем оптимальным управлением решениями задачи (36), (37), если выполнено соотношение (39).*

Теорема 11. *Пусть выполнены условия теоремы 10. Тогда для любых $x_0, x_1 \in \mathfrak{X}$ и $y \in H^{p+2}(\mathfrak{Y})$ существует единственное оптимальное управление решениями задачи (37) для уравнения (38).*

Помимо единственности оптимального управления решениями задачи (37) для уравнения (38) найдено следующее необходимое и достаточное условие: управление $\hat{u} \in H^{p+2}_\partial(\mathfrak{U})$ оптимально тогда и только тогда, когда $J'(\hat{u})(u - \hat{u}) \geq 0$, $u \in H^{p+2}_\partial(\mathfrak{U})$, т.е. для функционала (40) выполняется соотношение $\langle x(t,\hat{u}) - \tilde{x}, x(t,u) - x(t,\hat{u}) \rangle_{H^2(\mathfrak{X})} + [\hat{u}, u - \hat{u}] \geq 0$, $u \in H^{p+2}_\partial(\mathfrak{U})$, где $[\hat{u}, u - \hat{u}] = \sum\limits_{q=0}^{p+2} \int\limits_0^\tau \langle N_q \hat{u}^{(q)}(t), u^{(q)}(t) - \hat{u}^{(q)}(t) \rangle_{\mathfrak{U}} \, dt$ – билинейная непрерывная коэрцитивная форма на $H^{p+2}(\mathfrak{U})$.

Теорема 12. *Пусть пучок операторов $\vec{B}$ является $(A,0)$-ограниченным. Тогда при любых $y \in H^2(\mathfrak{Y})$ и $\tilde{x} \in H^2(\mathfrak{X})$ оптимальное управление $\hat{u} \in H^2_\partial(\mathfrak{U})$ для задачи (38), (37), (40) удовлетворяет неравенству*

$$\langle \Lambda_{\mathfrak{U}}^{-1} C^* \xi(t,\hat{u}), u(t) - \hat{u}(t) \rangle_{H^2(\mathfrak{U})} + \sum_{q=0}^{2} \int\limits_0^\tau \langle N_q \hat{u}^{(q)}(t), u^{(q)}(t) - \hat{u}^{(q)}(t) \rangle_{\mathfrak{U}} \geq 0, \quad u \in H^2_\partial(\mathfrak{U}),$$

где $\xi(t,\hat{u}) \in H^2(\mathfrak{Y}^*)$ – решение задачи $A^*\ddot{\xi} = -(B_1)^*\dot{\xi} + (B_0)^*\xi + (x(t,u) - \tilde{x})$, $P^*(\xi(\tau)) = 0$, $P^*(\dot{\xi}(\tau)) = 0$.

7. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнения соболевского типа второго порядка

Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{U}$ – гильбертовы пространства, операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y})$, функции $u : [0,\tau) \subset \mathbf{R}_+ \to \mathfrak{U}$, $y : [0,\tau) \subset \mathbf{R}_+ \to \mathfrak{Y}$ $(\tau < \infty)$.

$$A\ddot{x} = B_1\dot{x} + B_0 x + y + Cu. \tag{41}$$

Рассмотрим начально-конечную задачу

$$\begin{array}{c} P_{in}(\dot{x}(0) - x_1^0) = 0, \ P_{in}(x(0) - x_0^0) = 0; \\ P_{fin}(\dot{x}(\tau) - x_1^\tau) = 0, \ P_{fin}(x(\tau) - x_0^\tau) = 0; \end{array} \tag{42}$$

здесь $P_{in(fin)}$ – некоторые проекторы в пространстве $\mathfrak{X}$. Нас будет интересовать задача оптимального управления, которая заключается в отыскании пары $(\hat{x},\hat{u})$, где $\hat{x}$ – решение задачи (41), (42), а $\hat{u}\in\mathfrak{U}_{ad}$ – управление, для которого выполняется соотношение

$$J(\hat{x},\hat{u}) = \min_{(\mathrm{x,u})\in\mathfrak{X}\times\mathfrak{U}_{\mathrm{ad}}} J(x,u). \tag{43}$$

Здесь $J(x,u)$ – некоторый специальным образом построенный функционал качества, $\mathfrak{U}_{ad}$ – некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений $\mathfrak{U}$.

Для начала рассмотрим линейное неоднородное уравнение соболевского типа второго порядка

$$A\ddot{x} = B_1\dot{x} + B_0x + y. \tag{44}$$

Пусть выполняется условие

$$\int\limits_{\gamma} R^A_\mu(\vec{B})\, d\mu \equiv \mathbb{O}, \quad \gamma=\{\mu\in\mathbb{C}:\ |\mu|=r>a\}. \tag{A}$$

Лемма 4. [25] *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и выполнено условие (A). Тогда операторы $P=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\gamma} R^A_\mu(\vec{B})\mu A\, d\mu$, $Q=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\gamma}\mu A R^A_\mu(\vec{B})\, d\mu$ – проекторы в пространствах $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ соответственно.*

Если пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и выполнено условие (A), то существует единственное семейство вырожденных M,N-функций однородного уравнения (44) [25]. Пусть теперь выполнены условия

$$\begin{array}{l} A\text{-спектр пучка } \vec{B}\ \sigma^A(\vec{B})=\sigma^A_0(\vec{B})\bigcup\sigma^A_1(\vec{B}),\ \text{причем } \sigma^A_k(\vec{B})\neq\emptyset,\ k=0,1;\\ \text{и существует контур } \gamma_0\subset\mathbb{C}, \text{ограничивающий область } \Gamma_0\subset\mathbb{C} \text{ такую,}\\ \text{что } \Gamma_0\bigcap\sigma^A_0(\vec{B})=\sigma^A_0(\vec{B}),\ \overline{\Gamma}_0\bigcap\sigma^A_1(\vec{B})=\emptyset; \end{array} \tag{B}$$

и

$$\int\limits_{\gamma_0} R^A_\mu(\vec{B})d\mu = \mathbb{O}. \tag{A_0}$$

Тогда существуют относительно спектральные проекторы $P_{fin}=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\gamma_0}\mu R^A_\mu(\vec{B})Ad\mu\in\mathfrak{L}(\mathfrak{X})$, $P_{in}=P-P_{fin}$. Возьмем произвольные векторы $x^0_0,\ x^0_1,\ x^\tau_0,\ x^\tau_1\in\mathfrak{X}$.

Определение 6. *Решение $x=x(t)$ уравнения (44) назовем решением начально-конечной задачи для уравнения (44), если оно удовлетворяет условиям (42).*

Теорема 13. *Пусть пучок $\vec{B}$ (A,p)-ограничен, и выполнены условия $(A),(B),(A_0)$. Тогда для любых $\tau\in\mathbb{R}, x^0_k, x^\tau_k\in\mathfrak{X},\ k=0,1$, вектор-функции $y=y(t),\ t\in[0,\tau]$, такой, что $y^0=(I-Q)y\in C^{p+1}([0,\tau];\mathfrak{Y}^0)\cap C^{p+2}((0,\tau];\mathfrak{Y}^0)$, $y^{fin}=Q_{fin}y\in C([0,\tau];\mathfrak{Y}^{fin})$, $y^{in}=Q_{in}y\in C([0,\tau];\mathfrak{Y}^{in})$ существует единственное решение $x=x(t)$ задачи (42), (44), которое к тому же имеет следующий вид:*

$$\begin{gathered} x(t) = -\sum_{q=0}^{p} K^2_q(B^0_0)^{-1}\frac{d^q}{dt^q}y^0(t) + M^{t-\tau}_{fin}x^\tau_0 + M^t_{in}x^0_0 + \\ + N^{t-\tau}_{fin}x^\tau_1 + N^t_{in}x^0_1 + \int_0^t N^{t-s}_{in}y^{in}(s)ds - \int_t^\tau N^{t-s}_{fin}y^{fin}(s)ds, \end{gathered} \tag{45}$$

где $N^t_{fin} = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0} R^A_\mu(\vec{B})Ae^{\mu t}d\mu, t \in \mathbb{R}$, $M^t_{fin} = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0} R^A_\mu(\vec{B})(\mu A - B_1)e^{\mu t}d\mu, t \in \mathbb{R}$ – *пропагаторы уравнения (44).*

Необходимо отметить, что кроме этого были получены достаточные условия однозначной разрешимости начально-конечной задачи (8) для линейных полных уравнений соболевского типа высокого порядка (6) с относительно p-ограниченным, относительно p-секториальным оператором, относительно полиномиально ограниченным операторным пучком, причем результаты легли в основу численных методов. Полученные абстрактные результаты были использованы в исследованиях моделей соболевского типа высокого порядка, возникающих в гидродинамике, электродинамике, геологии, биоинженерии.

Определение 7. *Вектор-функцию $x \in H^2(\mathfrak{X})$ назовем сильным решением уравнения (44), если она п. в. на $(0,\tau)$ обращает его в тождество. Сильное решение $x = x(t)$ уравнения (44) назовем сильным решением задачи (42),(44), если оно удовлетворяет (42).*

В силу непрерывности вложения $H^2(\mathfrak{X}) \hookrightarrow C^1([0,\tau];\mathfrak{X})$ наше определение корректно. Термин «сильное решение» введен для того, чтобы отличать решение уравнения (44) в данном смысле от решения (45), которое обычно называют «классическим». Заметим, что классическое решение (45) является также и сильным решением задачи (42), (44).

Теорема 14. *Пусть пучок операторов $\vec{B}$ (A,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, выполнены условия $(A),(B),(A_0)$. Тогда для любых $x^0_k, x^\tau_k \in \mathfrak{X}, k = 0,1$ и $y \in H^{p+2}(\mathfrak{Y})$ существует единственное сильное решение задачи (42) для уравнения (44).*

Выделим в пространстве $H^{p+2}(\mathfrak{U})$ замкнутое и выпуклое подмножество $\mathfrak{U}_{ad} = H^{p+2}_\partial(\mathfrak{U})$– *множество допустимых управлений.*

Определение 8. *Вектор-функцию $\hat{u} \in H^{p+2}_\partial(\mathfrak{U})$ назовем оптимальным управлением решениями задачи (41), (42), если выполнено соотношение (43).*

Нашей целью является доказательство существования единственного управления $\hat{u} \in H^{p+2}_\partial(\mathfrak{U})$, минимизирующего функционал качества

$$J(x,u) = \sum_{q=0}^{2}\int_0^\tau ||x^{(q)} - \tilde{x}^{(q)}||^2 dt + \sum_{q=0}^{p+2}\int_0^\tau \left\langle N_q u^{(q)}, u^{(q)}\right\rangle_{\mathfrak{U}} dt. \qquad (46)$$

Здесь $N_q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $q = 0,\ 1,\ \ldots,\ p+2$, – самосопряженные и положительно определенные операторы, $\tilde{x}(t)$ – плановое состояние системы.

Теорема 15. *Пусть пучок операторов $\vec{B}$ (A,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, выполнены условия $(A),(B),(A_0)$. Тогда для любых $x^0_k, x^\tau_k \in \mathfrak{X}$, $k = 0,1$ и $y \in H^{p+2}(\mathfrak{Y})$ существует единственное оптимальное управление решениями задачи (42) для уравнения (41).*

Теорема 16. *Пусть пучок операторов $\vec{B}$ $(A,0)$-ограничен. Тогда при любых $y \in H^2(\mathfrak{Y})$ и $x \in H^2(\mathfrak{X})$ оптимальное управление $u_0 \in H^2_\partial(\mathfrak{U})$ для задачи (41), (42) характеризуется соотношениями $A^*\ddot{\xi} = -(B_1)^*\dot{\xi} + (B_0)^*\xi + (x(t,u) - \tilde{x})$, $P^*_{fin}(\xi(0)) = 0$, $P^*_{fin}(\dot{\xi}(0)) = 0$, $P^*_{in}(\xi(\tau)) = 0$, $P^*_{in}(\dot{\xi}(\tau)) = 0$, и выполняется неравенство*

$$\left\langle \Lambda^{-1}_{\mathfrak{U}} C^*\xi(t,u_0), u(t) - u_0(t)\right\rangle_{H^2(\mathfrak{U})} + \sum_{q=0}^{2}\int\limits_0^\tau \left\langle N_q u_0^{(q)}(t), u^{(q)}(t) - u_0^{(q)}(t)\right\rangle_{\mathfrak{U}} \geq 0\ \forall u \in H^2_\partial(\mathfrak{U}),$$

где $x(t,u_0) \in H^2(\mathfrak{X})$, $\xi(t,u_0) \in H^2(\mathfrak{Y}^*)$.

Литература

1. Келлер, А.В. Алгоритм решения задачи Шоуолтера – Сидорова для моделей леонтьевского типа // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2011. – № 4 (241), вып. 7. – С. 40–46.
2. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 104–125.
3. Загребина, С.А. Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики / С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2013. – № 2, вып. 6. – С. 5–24.
4. Шестаков, А. Л. Оптимальное измерение динамически искаженных сигналов /А. Л. Шестаков, Г. А. Свиридюк // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2011. – № 17 (234), вып. 8. – С. 70–75.
5. Шестаков, А.Л. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 12. – С. 56–68.
6. Худяков, Ю.В. Алгоритм численного исследования модели Шестакова – Свиридюка измерительного устройства с инерционностью и резонансами // Математические заметки СВФУ. – 2013. – Т. 20, № 2. – С. 211-221.
7. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
8. Zagrebina, S.A. The Stochastic Linear Oskolkov Model of the Oil Transportation by the Pipeline / S.A. Zagrebina, E.A. Soldatova, G.A. Sviridyuk // Semigroups of Operators – Theory and Applications / [International Conference], Bedlewo, Poland, Oktober 2013. – Heidelberg; New York; Dordrecht; London: Springer International Publishing Switzerland, 2015. – P. 317–325.
9. Keller, A.V. The Numerical Algorithms for the Measurement of the Deterministic and Stochastic Signals / A.V. Keller, A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk, Yu.V. Khudyakov // Semigroups of Operators – Theory and Applications / [International Conference], Bedlewo, Poland, Oktober 2013. – Heidelberg; New York; Dordrecht; London: Springer International Publishing Switzerland, 2015. – P. 183–195.
10. Sagadeeva, M.A. The Nonautonomous Linear Oskolkov Model on a Geometrical Graph: The Stability of Solutions and the Optimal Control / M.A. Sagadeeva, G.A. Sviridyuk // Semigroups of Operators – Theory and Applications / [International Conference], Bedlewo, Poland, Oktober 2013. – Heidelberg; New York; Dordrecht; London: Springer International Publishing Switzerland, 2015. – P. 257–271.
11. Shestakov, A.L. Reconstruction of a Dynamically Distorted Signal with Respect to the Measuring Transducer Degradation / A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk, M.A. Sagadeeva // Applied Mathematical Sciences. – 2014. – V. 8, № 43. (41-44) – P. 2125–2130.
12. Nelson, E. Dynamical Theories of Brownian Motion / E. Nelson. – Princeton: Princeton University Press, 1967.
13. Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. – London; Dordrecht; Heidelberg; N.-Y.: Springer, 2011.
14. Шестаков, А.Л. Об измерении «белого шума» / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 27 (286), вып. 13. – С. 99–108.
15. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейной модели Хоффа / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Математические заметки. – 2013. – Т. 94, № 2. – С. 225–236.

16. Zagrebina, S.A. The Generalized Splitting Theorem for Linear Sobolev Type Equations in Relatively Radial Case / S.A. Zagrebina, M.A. Sagadeeva // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2014. – Т. 7. – С. 19–33.
17. Замышляева, А.А. Оптимальное управление решениями задачи Шоуолтера – Сидорова – Дирихле для уравнения Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49, № 11. – С. 1390–1398.
18. Замышляева, А.А. Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска – Лява на графе / А.А. Замышляева, А.В. Юзеева// Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 2. – С. 18–29.
19. Замышляева, А.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнения Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 5 (264), вып. 11. – С. 13–24.
20. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Физматлит, 2004.
21. Сагадеева, М.А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева. — Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.
22. Манакова, Н.А. Задачи оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова. — Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 88 с.
23. Манакова, Н.А. Об одной задаче оптимального управления с функционалом качества общего вида / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Вестник Самарского государственного технического университетата. Серия: Физико-математические науки. – 2011. – № 4 (25). – С. 18–24.
24. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для одной эволюционной модели / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Математические заметки СВФУ. – 2012. – Т. 19, № 2. – С. 111–127.
25. Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева. — Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.

Алевтина Викторовна Келлер, доктор физико-математических наук, кафедра математического моделирования, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), alevtinak@mail.ru.

Софья Александровна Загребина, доктор физико-математических наук, кафедра дифференциальных и стохастических уравнений, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), zagrebina_sophiya@mail.ru.

Поступила в редакцию 20 января 2015 г.

MSC 35K70, 60H30 **DOI: 10.14529/mmp150201**

Some Generalizations of the Showalter – Sidorov Problem for Sobolev-Type Models

A.V. Keller, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, alevtinak@mail.ru,
S.A. Zagrebina, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, zagrebina_sophiya@mail.ru

At present, investigations of Sobolev-type models are actively developing. In the solution of applied problems the results allowing to get their numerical solutions are very significant. The initial Showalter – Sidorov condition is not simply a generalization of the Cauchy condition for Sobolev-type models. It allows to find an approximate solution without checking the coordination of initial data. This article presents an overview of some results of the Chelyabinsk mathematical school on Sobolev type equations obtained using either directly Showalter – Sidorov condition or its generalizations.

The article consists of seven sections. The first one includes results on investigation of solvability of an optimal measurement problem for the Shestakov – Sviridyuk model. The second section provides an overview of the currently existing approaches to the concept of white noise. The third section contains results on solvability of a weakened Showalter – Sidorov problem for the Leontief type system with additive "white noise". In the fourth section we present results on the unique solvability of multipoint initial-final value problem for the Sobolev type equation of the first order. A study of optimal control of solutions to this problem is discussed in the fifth section. The sixth and the seventh sections contain results related to research of optimal control of solutions to the Showalter – Sidorov problem and initial-final value problem for the Sobolev-type equation of the second order, respectively.

Keywords: Sobolev type equations; Leontief type sistems; optimal control; Showalter – Sidorov problem; the (multipoint) initial-finale value condition; optimal measurement.

References

1. Keller A.V. The Algorithm for Solution of the Showalter – Sidorov Problem for Leontief Type Models. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2011, no. 4 (241), issue 7, pp. 40–46. (in Russian)
2. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. The Showalter – Sidorov Problem as a Phenomena of the Sobolev-Type Equations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics*, 2010, vol. 3, no. 1, pp. 51–72. (in Russian)
3. Zagrebina S.A. The Initial-Finite Problems for Nonclassical Models of Mathematical Physics. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2013, vol. 6, issue 2, pp. 5–24. (in Russian)
4. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. Optimal Measurement of Dynamically Distorted Signals. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2011, no. 17 (234), issue 8, pp. 70–75.
5. Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. The Numerical Solution of the Optimal Demension Problem. *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 73, no. 1, pp. 97–104. DOI: 10.1134/S0005117912010079
6. Khudyakov Yu.V. The Numerical Algorithm to Investigate Shestakov – Sviridyuk's Model of Measuring Device with Inertia and Resonances. *Yakutian Mathematical Journal*, 2013, vol. 20, no. 2, pp. 211–221. (in Russian)
7. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* Utrecht, Boston, Köln, Tokyo, VSP, 2003. DOI: 10.1515/9783110915501
8. Zagrebina S.A., Soldatova E.A., Sviridyuk G.A. The Stochastic Linear Oskolkov Model of the Oil Transportation by the Pipeline. *Semigroups of Operators – Theory and Applications.* [International Conference, Bedlewo, Poland, Oktober 2013]. Heidelberg, N.-Y., Dordrecht, London, Springer Int. Publ. Switzerland, 2015, pp. 317–325.
9. Keller A.V., Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Khudyakov Yu.V. The Numerical Algorithms for the Measurement of the Deterministic and Stochastic Signals. *Semigroups of Operators – Theory and Applications.* [International Conference, Bedlewo, Poland, Oktober 2013]. Heidelberg, N.-Y., Dordrecht, London, Springer Int. Publ. Switzerland, 2015, pp. 183–195.

10. Sagadeeva M.A., Sviridyuk G.A. The Nonautonomous Linear Oskolkov Model on a Geometrical Graph: The Stability of Solutions and the Optimal Control. *Semigroups of Operators – Theory and Applications.* [International Conference, Bedlewo, Poland, Oktober 2013]. Heidelberg, N.-Y., Dordrecht, London, Springer Int. Publ. Switzerland, 2015, pp. 257–271.
11. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Sagadeeva M.A. Reconstruction of a Dynamically Distorted Signal with Respect to the Measuring Transducer Degradation. *Applied Mathematical Sciences*, 2014, vol. 8, no. 43. (41-44), pp. 2125–2130. DOI: 10.12988/ams.2014.312718
12. Nelson E. *Dynamical Theories of Brownian Motion.* Princeton, Princeton University Press, 1967.
13. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics.* London, Dordrecht, Heidelberg, N.-Y., Springer, 2011.
14. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. On the Measurement of the "White Noise". *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2012, no. 27 (286), issue 13, pp. 99–108.
15. Manakova N.A., Dylkov A. G. Optimal Control of the Solutions of the Initial-Finish Problem for the Linear Hoff Model. *Mathematical Notes*, 2013, vol. 94, issue 2, pp. 220–230. DOI: 10.1134/S0001434613070225
16. Zagrebina S.A., Sagadeeva M.A. The Generalized Splitting Theorem for Linear Sobolev type Equations in Relatively Radial Case. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics*, 2014, vol. 7, pp. 19–33.
17. Zamyshlyaeva A.A., Tsyplenkova O.N. Optimal Control of Solutions of the Showalter – Sidorov – Dirichlet Problem for the Boussinesq – Love Equation. *Differential Equations,* 2013, vol. 49, no. 11, pp. 1356–1365. DOI: 10.1134/S0012266113110049
18. Zamyshlyaeva A.A., Yuzeeva A.V. Initial-Final Problem for the Boussinesq – Love Equation on a Graph. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics*, 2010, vol. 3, no. 2, pp. 18–29. (in Russian)
19. Zamyshlyaeva A.A., Tsyplenkova O.N. The Optimal Control over Solutions of the Initial-Finish Value Problem for the Boussinesque–Löve Equation. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2012, vol. 5 (264), issue 11, pp. 13–24. (in Russian)
20. Gantmacher F.R. *The Theory of Matrices.* AMS Chelsea Publishing: Reprinted by American Mathematical Society, 2000. 660 p.
21. Sagadeeva M.A. *Dichotomy of Solutions of Linear Sobolev Type Equations.* Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2012. 107 p. (in Russian)
22. Manakova N.A. *Optimal Control Problem for the Semilinear Sobolev Type Equations.* Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2012. 88 p. (in Russian)
23. Manakova N.A., Dylkov A.G. On One Optimal Control Problem with a Penalty Functional in General Form. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya: Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2011, no. 4 (25), pp. 18–24. (in Russian)
24. Manakova N.A., Dyl'kov A.G. Optimal Control of Solutions of the Initial-Finish Value Problem for a Evolutionary Models. *Yakutian Mathematical Journal*, 2012, vol. 19, no. 2, pp. 111–127. (in Russian)
25. Zamyshlyaeva A.A. *Linear Sobolev Type Equations of High Order.* Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2012. 107 p. (in Russian)

Received January 20, 2015