УДК 517.968 DOI: 10.14529/mmp140311

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА I РОДА С КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫМИ ЯДРАМИ

Д.Н. Сидоров, А.Н. Тында, И.Р. Муфтахов

Интегральные уравнения Вольтерра имеют большое значение при построении математических моделей в физике, экономике, экологии и т.д. Важную роль во многих таких моделях играют рассматриваемые в данной статье линейные интегральные уравнения Вольтерра первого рода, у которых ядра претерпевают разрывы первого рода на определенных кривых, проходящих через начало координат. Приводятся теоретические результаты относительно вопросов существования и единственности решений таких уравнений и их регуляризации. Также для таких уравнений Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами предлагается эффективный численный метод решения, который основан на использовании квадратурной формулы средних прямоугольников. Указана оценка погрешности предлагаемого метода. Для модельных примеров приведены результаты численных расчетов, содержащие информацию о погрешностях и порядке сходимости.

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра I рода; развивающиеся системы; модель Глушкова; численные методы.

Введение

В данной статье рассматриваются слабо-регулярные уравнения Вольтерра I рода. Под слабо-регулярными понимаются линейные интегральные уравнения Вольтерра I рода

$$\int_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t),\ \ 0 \le s \le t \le T,\ \ f(0) = 0, \tag{1}$$

где ядро определено формулой

$$K(t,s) = \begin{cases} K_1(t,s),\ t,s \in m_1, & m_i = \{t,s \mid \alpha_{i-1}(t) < s < \alpha_i(t)\}, \\ \ \ \dots\ \ \dots\dots\dots & \\ K_n(t,s),\ t,s \in m_n, & \alpha_0(t) = 0,\ \alpha_n(t) = t,\ i = \overline{1,n}, \end{cases}$$

$\alpha_i(t)$, $f(t) \in \mathcal{C}^1_{[0,T]}$, $K_i(t,s)$ имеют непрерывные производные по t для $t,s \in \overline{m_i}$, $K_n(t,t) \neq 0$, $\alpha_i(0) = 0$, $0 < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) < \dots < \alpha_{n-1}(t) < t$, $\alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$ возрастают в малой окрестности $0 \le t \le \tau$. Таким образом, на кривых $\alpha_i(t)$ (эндогенных кривых запаздывания) ядро $K(t,s)$ претерпевает разрыв 1-го рода. Функции K_i на соотвествуюших $\alpha_i(t)$ могут быть продолжены по непрерывности.

Данные уравнения имеют важное значение при построении математических моделей в физике, экономике и экологии. Теория интегральных уравнений развивающихся систем рассматривалась в середине XX века в работах Л.В. Канторовича, В.М. Глушкова и R. Solow. Важную роль в этих моделях играют линейные интегральные уравнения Вольтерра первого рода, у которых пределы интегрирования являются функциями времени. Следует отметить, что интегральная модель Глушкова для развивающихся систем является частным случаем интегрального уравнения Вольтерра (1), где все функции $K_i(t,s)$ равны нулю, кроме $K_n(t,s)$.

Подчеркнем, что интегральное уравнение Вольтерра является частным случаем уравнения Фредгольма и является в общем случае некорректно поставленной задачей. Численный метод решения уравнений Фредгольма второго рода с ядрами, претерпевающими разрывы вдоль кривых, рассматривался в работе [5].

Такие слабо-регулярные уравнения были введены в [6], в монографии [1] теория таких уравнений обобщается на случай систем уравнений и на абстрактные операторные уравнения. Следует отметить, что решение уравнения (1) может содержать некоторые произвольные константы и может быть неограниченным, когда t стремится к 0. Действительно, если

$$K(t,s) = \begin{cases} 1,\ 0 < s < t/2, \\ -1,\ t/2 < s < t, \end{cases} \tag{2}$$

$f(t) = t$, тогда уравнение (1) имеет решение $x(t) = c - \frac{\ln t}{\ln 2}$, где c остается свободным параметром. Численное решение интегрального уравнения Вольтерра (1), основанное на использовании комбинации левых и правых прямоугольников, рассмотрено Е.В. Марковой и Д.Н. Сидоровым в [4]. В данной работе для таких уравнений с кусочно-непрерывными ядрами мы предлагаем численный метод и обсуждаем аналитический алгоритм построения непрерывного решения в следующем виде

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N} x_i(\ln t) t^i + t^N u(t). \tag{3}$$

Коэфициенты $x_i(\ln t)$ представлены в виде полиномов степени $\ln t$ и они могут зависеть от определенного числа произвольных констант. N определяет необходимую гладкость функций $K_i(t,s)$, $f(t)$. Введем следующее обозначение

$$D(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \left| \alpha_i'(t) K_n^{-1}(t,t) \right| \cdot \left| K_i(t,\alpha_i(t)) - K_{i+1}(t,\alpha_i(t)) \right|$$

и кратко перечислим основные результаты. Здесь можно сослаться на работы [7, 8].

Теорема 1. (Достаточные условия существования и единственности локального решения) *Пусть для $t \in [0,T]$ выполнены следующие условия: $K_i(t,s)$, $i = \overline{1,n}$, $\alpha_i(t)$ и $f(t)$ имеют непрерывные производные по t, $K_n(t,t) \neq 0$, $0 = \alpha_0(t) < \alpha_1(t) < \dots < \alpha_{n-1}(t) < \alpha_n(t) = t$ для $t \in (0,T]$, $\alpha_i(0) = 0$, $f(0) = 0, D(0) < 1$, тогда $\exists \tau > 0$ такое, что уравнение (1) имеет единственное локальное решение в $\mathcal{C}_{[0,\tau]}$. Кроме того, если $\min\limits_{\tau \le t \le T}(t - \alpha_{n-1}(t)) = h > 0$, тогда уравнение (1) имеет единственное общее решение в $\mathcal{C}_{[0,T]}$.*

Введем следующие условия.

A. Существуют полиномы $\mathcal{K}_i^M(t,s) = \sum\limits_{\nu+\mu=0}^{M} K_{i\nu\mu} t^\nu s^\mu$, $i = \overline{1,n}$, $f^M(t) = \sum\limits_{\nu=1}^{M} f_\nu t^\nu$, $\alpha_i^M(t) = \sum\limits_{\nu=1}^{M} \alpha_{i\nu} t^\nu$, $i = \overline{1,n-1}$, такие, что для $t \to +0$, $s \to +0$ справедливы следующие оценки:

$$|f(t) - f^M(t)| = \mathcal{O}(t^{M+1}),$$

$$|K_i(t,s) - \mathcal{K}_i^M(t,s)| = \mathcal{O}((t+s)^{M+1}),\ i = \overline{1,n},$$

$$|\alpha_i(t) - \alpha_i^M(t)| = \mathcal{O}(t^{M+1}),\ i = \overline{1,n-1}.$$

B. Для фиксированного $q \in (0,1)$, $\exists \tau \in (0,T], 0 < \varepsilon < 1 : \max\limits_{t \in [0,\tau]} \varepsilon^M D(t) \le q < 1$.

C. Существует N^* такое, что $\left(\int\limits_0^t K(t,s)\widehat{x}(s)\,ds - f(t)\right)' = \mathcal{O}(t^{N^*})$.

Теорема 2. (Регуляризация) [7]

Пусть $\widehat{x}(t)$ является известной функцией, а условие **C** *справедливо для $N^* \geq M$. Тогда уравнение (1) имеет решение $x(t) = \widehat{x}(t) + t^{N^*}u(t)$, где $u(t) \in \mathcal{C}_{[0,T]}$ единственная и может быть построена с помощью метода последовательных приближений из уравнения $\int_0^t K(t,s)s^N u(s)\,ds = g(t)$, где $g(t) = -\int_0^t K(t,s)\widehat{x}(t)\,ds + f(t)$.*

Теорема 3. (Ослабленное достаточное условие существования и единственности) [3, 6]

Пусть условия **B** *и* **C** *выполнены, и $B(j) = K_n(0,0) + \sum\limits_{i=1}^{n-1}(K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0)) \cdot (\alpha_i'(0))^{1+j} \neq 0$ для $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда уравнение (1) имеет единственное решение $x(t) = x^M(t) + t^{N^*}u(t)$ в $\mathcal{C}_{[0,T]}$, $M \geq N$. Кроме того, для $t \to +0$ полином $\widehat{x}(t) \equiv x^M(t) = \sum\limits_{i=0}^{M} x_i t^i$ является M-ным порядком асимптотической аппроксимации данного решения.*

1. Численный метод

В данном разделе мы предлагаем для слабо-регулярных уравнений Вольтерра (1) общий численный метод, который основан на использовании квадратурной формулы средних прямоугольников. Погрешность предлагаемого метода имеет порядок $\mathcal{O}(1/N)$.

Для построения численного решения уравнения (1) на отрезке $[0,T]$ введем сетку узлов (необязательно равномерную)

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T, \;\; h = \max_{i=\overline{1,N}}(t_i - t_{i-1}) = \mathcal{O}(N^{-1}). \tag{4}$$

Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$x_N(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i \delta_i(t), \; t \in (0,T], \; \delta_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{for } t \in \Delta_i = (t_{i-1}, t_i]; \\ 0, & \text{for } t \notin \Delta_i \end{cases} \tag{5}$$

с неопределенными пока коэффициентами $x_i, \; i = \overline{1,N}$.

Для определения значения $x_0 = x(0)$ продифференцируем обе части уравнения (1) по t

$$f'(t) = \sum_{i=1}^{n}\left(\int\limits_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} \frac{\partial K_i(t,s)}{\partial t} x(s)ds + \alpha_i'(t)K_i(t,\alpha_i(t))x(\alpha_i(t)) - \alpha_{i-1}'(t)K_i(t,\alpha_{i-1}(t))x(\alpha_{i-1}(t))\right).$$

Из последнего соотношения получаем

$$x_0 = \frac{f'(0)}{\sum\limits_{i=1}^{n} K_i(0,0)\left[\alpha_i'(0) - \alpha_{i-1}'(0)\right]}. \tag{6}$$

Предполагаем, что выполнены условия теоремы 1 и $\sum\limits_{i=1}^{n} K_i(0,0) \cdot [\alpha_i'(0) - \alpha_{i-1}'(0)] \neq 0$.

Далее введем обозначение $f_k = f(t_k)$, $k = 1, \ldots, N$. Для определения коэффициента x_1 запишем исходное уравнение в точке $t = t_1$

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\alpha_{i-1}(t_1)}^{\alpha_i(t_1)} K_i(t_1,s)x(s)ds = f_1. \tag{7}$$

Так как на данном шаге длины всех отрезков интегрирования $\alpha_i(t_1) - \alpha_{i-1}(t_1)$ в (7) не превосходят h, а приближенное решение принимает значение x_1, то, применяя квадратурную формулу средних прямоугольников, имеем

$$x_1 = \frac{f_1}{\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i(t_1) - \alpha_{i-1}(t_1)) K_i(t_1, \frac{\alpha_i(t_1)+\alpha_{i-1}(t_1)}{2})}. \tag{8}$$

Теперь введем обозначение v_{ij} в качестве номера сегмента сетки (4), внутрь или на правую границу которого попадает значение $\alpha_i(t_j)$, т.е. $\alpha_i(t_j) \in \Delta_{v_{ij}}$. Очевидно, что $v_{ij} < j$ при $i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{1, N}$, т.к. в этом случае $\alpha_i(t_j) < t_j$.

Пусть теперь известны коэффициенты $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ приближенного решения. Уравнение (1) в точке $t = t_k$, имеющее вид

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\alpha_{i-1}(t_k)}^{\alpha_i(t_k)} K_i(t_k, s) x(s) ds = f_k,$$

может быть переписано следующим образом

$$I_1(t_k) + I_2(t_k) + \dots + I_n(t_k) = f_k,$$

где

$$I_1(t_k) = \sum_{j=1}^{v_{1,k}-1} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K_1(t_k, s) x(s)\, ds + \int\limits_{t_{v_{1,k}}-1}^{\alpha_1(t_k)} K_1(t_k, s) x(s)\, ds,$$

$$\dots$$

$$I_n(t_k) = \int\limits_{\alpha_{n-1}(t_k)}^{t_{v_{n-1,k}}} K_n(t_k, s) x(s)\, ds + \sum_{j=v_{n-1,k}+1}^{k} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K_n(t_k, s) x(s)\, ds.$$

1. Если $v_{p-1,k} \neq v_{p,k}$, $p = 2, \dots, n-1$, тогда

$$I_p(t_k) = \int\limits_{\alpha_{p-1}(t_k)}^{t_{v_{p-1,k}}} K_p(t_k, s) x(s)\, ds + \sum_{j=v_{p-1,k}+1}^{v_{p,k}-1} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K_p(t_k, s) x(s)\, ds + \int\limits_{t_{v_{p,k}}-1}^{\alpha_p(t_k)} K_p(t_k, s) x(s)\, ds.$$

2. Если $v_{p-1,k} = v_{p,k}$, $p = 2, \dots, n-1$, тогда

$$I_p(t_k) = \int\limits_{\alpha_{p-1}(t_k)}^{\alpha_p(t_k)} K_p(t_k, s) x(s)\, ds.$$

Замечание 1. Количество слагаемых в каждой строчке последней формулы зависит от массива v_{ij}, определяемого по входным данным: функциям $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$ и фиксированной (при конкретном значении N) сетке.

Каждый интеграл в последнем равенстве теперь аппроксимируется по формуле средних прямоугольников, т.е.

$$\int\limits_{t_{v_{p,k}-1}}^{\alpha_p(t_k)} K_p(t_k, s) x(s) ds \approx \left(\alpha_p(t_k) - t_{v_{p,k}-1}\right) K_p\left(t_k, \frac{\alpha_p(t_k) + t_{v_{p,k}-1}}{2}\right) x_N\left(\frac{\alpha_p(t_k) + t_{v_{p,k}-1}}{2}\right).$$

Кроме того, на тех интервалах, где искомая функция определена, выбираем $x_N(t)$ (т.е. $t \leqslant t_{k-1}$). На остальных интервалах неизвестное значение x_k появляется в нескольких последних слагаемых. Выражаем явно x_k и переходим к следующему шагу в цикле по k. Количество таких слагаемых определяется по начальным данным в результате анализа массива v_{ij}. Погрешность метода

$$\varepsilon = \max_{0 \le i \le N} |\bar{x}(t_i) - x^h(t_i)| \tag{9}$$

имеет порядок $O\left(\frac{1}{N}\right)$.

Также проанализируем ошибку численного решения для случая, когда точное решение $\bar{x}$ заранее неизвестно. Для этого определим поточечную разницу между двумя сетками с шагом h и шагом $h/2$ на отрезке $[0, T]$

$$D_N = \max_{0 \le i \le N, 0 \le j \le 2N} |x_N^h(t_i) - x_{2N}^h(t_j)|, \tag{10}$$

где $t_i = t_j, i = 2j$.

Также введем определение порядка сходимости

$$p_N = \log_2 \frac{D_N}{D_{2N}}, \tag{11}$$

основанном на (10).

Далее приведены численные примеры и таблицы расчетов для каждого примера с учетом различных значений N, содержащие информацию об ошибке численного решения, значение поточечной разницы D_N для двух сеток, порядок сходимости p_N.

2. Примеры

Рассмотрим три примера, в которых используется равномерная сетка узлов.

Пример 1.

$$\int_0^{t/3} (1 + t - s)x(s)\,ds - \int_{t/3}^{t} x(s)\,ds = \frac{t^4}{108} - \frac{25t^3}{81},\ t \in [0,\,2],$$

точным решением является $\bar{x}(t) = t^2$. Табл. 1 показывает погрешности $\varepsilon = \max\limits_{0 \le i \le N} |\bar{x}(t_i) - x^h(t_i)|$, D_N, p_N для различных значений N.

Пример 2.

$$\int_0^{\frac{t}{9}} (1 + t - s)x(s)\,ds - \int_{\frac{t}{9}}^{\frac{2t}{9}} x(s)\,ds - 2\int_{\frac{2t}{9}}^{\frac{4t}{9}} x(s)\,ds + \int_{\frac{4t}{9}}^{t} x(s)\,ds = \frac{11t^4}{26244} + \frac{547t^3}{2187},$$

$t \in [0,\,2]$, точным решением является $\bar{x}(t) = t^2$. Табл. 2 показывает ε, D_N, p_N для различных значений шага h.

Пример 3.

$$\int_0^{\frac{t}{3}} (1 + t - s)x(s)\,ds - \int_{\frac{t}{3}}^{\frac{2t}{3}} x(s)\,ds + \int_{\frac{2t}{3}}^{t} x(s)\,ds = \frac{t^4}{108} + \frac{13t^3}{81},\ t \in [0,\,2],$$

точным решением является $\bar{x}(t) = t^2$. Табл. 3 показывает ε, D_N, p_N для различных значений шага h.

Таблица 1

Погрешности для первого примера

h	ε	D_N	p_N
1/32	0,130340	0,074623	0,967742
1/64	0,078045	0,038155	0,922073
1/128	0,039890	0,020136	1,046191
1/256	0,019753	0,009750	0,922177
1/512	0,010027	0,005145	0,988647
1/1024	0,005083	0,002593	1,007161
1/2048	0,002569	0,001290	0,986399
1/4096	0,001288	0,000651	1,001988
1/8192	0,000650	0,000325	1,002385
1/16384	0,000324	0,000162	0,994591
1/32768	0,000162	0,000081	1,000144
1/65536	0,000081	0,000040	1,000961
1/131072	0,000018	0,000020	

Таблица 2

Погрешности для второго примера

h	ε	D_N	p_N
1/32	0,137188	0,090301	0,961135
1/64	0,074085	0,046383	0,831888
1/128	0,045313	0,026058	0,882790
1/256	0,022111	0,014131	1,034280
1/512	0,011079	0,006899	0,995283
1/1024	0,005492	0,003461	0,027476
1/2048	0,002745	0,001697	0,868539
1/4096	0,001412	0,000929	0,943927
1/8192	0,000771	0,000483	1,033869
1/16384	0,000369	0,000236	0,964586
1/32768	0,000182	0,000120	1,018702
1/65536	0,000092	0,000059	0,925510
1/131072	0,000047	0,000031	

Заключение

В данной статье рассмотрен новый класс слабо-регулярных линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода, которые были введены в работе [6]. Отмечены полученные ранее основные результаты для этого класса уравнений. Основным вкладом данной работы является общий численный метод, предназначенный для решения таких сладо-регулярных уравнений. Численный метод использует квадратурную формулу средних прямоугольников, а погрешность метода имеет порядок $\mathcal{O}(1/N)$. Приведенные примеры показывают эффективность разработанного численного метода.

Таблица 3

Погрешности для третьего примера

h	ε	D_N	p_N
1/32	0,148374	0,081614	0,904759
1/64	0,067520	0,043591	0,882263
1/128	0,033878	0,023649	0,610808
1/256	0,020041	0,015486	0,777457
1/512	0,010829	0,009034	1,160756
1/1024	0,005004	0,004040	0,649453
1/2048	0,003090	0,002576	0,704815
1/4096	0,001715	0,001580	1,280209
1/8192	0,000780	0,000650	0,477592
1/16384	0,000510	0,000467	0,941993
1/32768	0,000231	0,000243	0,911317
1/65536	0,000124	0,000129	0,571444
1/131072	0,000078	0,000087	

Работа частично поддержана интеграционным проектом СО и УрО РАН «Теория и методы решения задач дискретной оптимизации и их применение в информационно-телекоммуникационных системах».

Литература

1. Сидоров, Д.Н. Методы анализа интегральных динамических моделей: теория и приложения / Д.Н. Сидоров. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2013.

2. Boikov, I.V. Approximate Solution of Nonlinear Integral Equations of Developing Systems Theory / I.V. Boikov, A.N. Tynda // Differential Equations. – 2003. – V. 39, № 9. – P. 1277–1288.

3. Сидоров, Д. Н. О семействах решений интегральных уравнений Вольтерры первого рода с разрывными ядрами / Д.Н. Сидоров // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – №18 (277), вып. 12. – С. 44–52.

4. Markova, E.V. On One Integral Volterra Model of Developing Dynamical Systems / E.V. Markova, D.N. Sidorov // Automation and Remote Control. – 2014. – V. 75, № 3. – P. 413–421.

5. Micke, A. The Treatment of Integral Equations with Discontinuous Kernels Using Product Type Quadrature Formula / A. Micke // Computing. – 1989. – V. 42. – P. 207–223.

6. Sidorov, D.N. Volterra Equations of the First Kind with Discontinuous Kernels in the Theory of Evolving Systems Control / D.N. Sidorov // Stud. Inform. Univ. – 2011. – V. 9. – P. 135–146.

7. Sidorov, D.N. On Parametric Families of Solutions of Volterra Integral Equations of the First Kind with Piecewise Smooth Kernel / D.N. Sidorov // Differential Equations. – 2013. – V. 49, № 2. – P. 210–216.

8. Sidorov, D.N. Solvability of Systems of Volterra Integral Equations of the First Kind with Piecewise Continuous Kernels / D.N. Sidorov // Russian Mathematics. – 2013. – V. 57, № 1. – P. 62–72.
9. Tynda, A.N. Numerical Algorithms of Optimal Complexity for Weakly Singular Volterra Integral Equations / A.N. Tynda // Comp. Meth. Appl. Math. – 2006. – V. 6, № 4. – P. 436–442.

Денис Николаевич Сидоров, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Вычислительная техника», Иркутский государственный технический университет, Иркутский государственный университет, Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН (г. Иркутск, Российская Федерация), contact.dns@gmail.com.

Александр Николаевич Тында, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая и прикладная математика», Пензенский государственный университет (г. Пенза, Российская Федерация), tyndaan@mail.ru.

Ильдар Ринатович Муфтахов, аспирант кафедры «Вычислительная техника», Иркутский государственный технический университет (г. Иркутск, Российская Федерация), ildar_sm@mail.ru.

Поступила в редакцию 20 мая 2014 г.

**Bulletin of the South Ural State University.
Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software",
2014, vol. 7, no. 3, pp. 107–115.**

MSC 45D05 **DOI: 10.14529/mmp140311**

Numerical Solution of Volterra Integral Equations of the First Kind with Piecewise Continuous Kernel

D.N. Sidorov, Irkutsk State Technical University, Irkutsk State University, Energy Systems Institute, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russian Federation, contact.dns@gmail.com,
A.N. Tynda, Penza State University, Penza, Russian Federation, tyndaan@mail.ru,
I.R. Muftahov, Irkutsk State Technical University, Irkutsk, Russian Federation, ildar_sm@mail.ru

Integral equations are in the core of many mathematical models in physics, economics and ecology. Volterra integral equations of the first kind with jump discontinuous kernels play important role in such models and they are considered in this article. Regularization method and sufficient conditions for existence and uniqueness of the solution of such integral equations are derived. An efficient numerical method based on the mid-rectangular quadrature rule for these equations with jump discontinuous kernels is proposed. The accuracy of proposed numerical method is $\mathcal{O}(N^{-1})$. The model examples demonstrate efficiency of proposed method: errors, two mesh differences and orders of convergent.

Keywords: Volterra integral equations of the 1st kind; evolving systems; Glushkov integral model; numerical method.

References

1. Sidorov D.N. *Metody analiza integral'nykh dinamicheskikh modelei: teoriya i prilozheniya* [Methods of Analysis of Integral Dynamic Models: Theory and Applications]. Irkutsk, Izd. IGU, 2013. 293 p.
2. Boikov I.V., Tynda A.N. Approximate Solution of Nonlinear Integral Equations of Developing Systems Theory. *Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 9, pp. 1277–1288. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000012695.06431.c4
3. Sidorov D.N. Solution to the Volterra Integral Equations of the First Kind with Discontinuous Kernels. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2012, no. 18 (277), pp. 44–52. (in Russian)
4. Markova E.V., Sidorov D.N. On One Integral Volterra Model of Developing Dynamical Systems. *Automation and Remote Control*, 2014, vol. 75, no. 3, pp. 413–421. DOI: 10.1134/S0005117914030011
5. Micke A. The Treatment of Integral Equations with Discontinuous Kernels Using Product Type Quadrature Formula. *Computing*, 1989, vol. 42, pp. 207–223. DOI: 10.1007/BF02239749
6. Sidorov D.N. Volterra Equations of the First Kind with Discontinuous Kernels in the Theory of Evolving Systems Control. *Stud. Inform. Univ.,* 2011, vol. 9, pp. 135–146.
7. Sidorov D.N. On Parametric Families of Solutions of Volterra Integral Equations of the First Kind with Piecewise Smooth Kernel. *Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 2, pp. 210–216. DOI: 10.1134/S0012266113020079
8. Sidorov D.N. Solvability of Systems of Volterra Integral Equations of the First Kind with Piecewise Continuous Kernels. *Russian Mathematics*, 2013, vol. 57, issue 1, pp. 62–72.
9. Tynda A.N. Numerical Algorithms of Optimal Complexity for Weakly Singular Volterra Integral Equations. *Comp. Meth. Appl. Math.*, 2006, vol. 6, no. 4, pp. 436–442.

Received May 20, 2014