УДК 517.9

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО НЕКЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А. С. Шипилов

ON STABILTY OF SOLUTIONS FOR A NONCLASSICAL EQUATIONS

A. S. Shipilov

Для уравнения $\lambda u_t - u_{txx} = \nu u_{xx} - u_x u$ доказано существование конечномерного неустойчивого и бесконечномерного устойчивого инвариантных многообразий.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, неустойчивое и устойчивое инвариантные многообразия

One proved the existence of finite dimensional stable manifold and infinite dimensional unstable manifold for the equation $\lambda u_t - u_{txx} = \nu u_{xx} - u_x u$.
Keywords: Sobolev type equations, unstable and stable invariant manifolds

Уравнение

$$\lambda u_t - u_{txx} = \nu u_{xx} - u_x u \tag{1}$$

является одномерным аналогом системы Осколкова, а также гибридом уравнений Бенджамина – Бона – Махони и Бюргерса. В [1] показано, что фазовое пространство задачи Дирихле

$$u(a,t) = u(b,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

для уравнения (1) есть объединение двух непересекающихся связных компонент. Результат получен в рамках общей теории полулинейных уравнений соболевского типа вида

$$L\dot{u} = Mu + N(u). \tag{3}$$

В [2] теорема Адамара – Перрона о существовании устойчивого и неустойчивого многообразий в окрестности начала координат распространена на уравнение (3) при следующих условиях.

(A1) Оператор $M(L,p)$-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ (т.е. оператор $M(L,\sigma)$-ограничен, и ∞ – устранимая особая точка ($p=0$) либо полюс порядка $p \in \mathbb{N}$ L-резольвенты оператора M. Терминология формализована в [3]).

(A2) L-спектр оператора M $\sigma^L(M) = \sigma^L_e(M) \cup \sigma^L_r(M) \neq \emptyset$, где $\sigma^L_{e(r)}(M) = \{\mu \in \sigma^L(M) : \operatorname{Re}\mu < 0 \ (\operatorname{Re}\mu > 0)\}$.

(A3) Оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $N(0) = 0$, $N'_0 = \mathbb{O}$, где $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, N'_u – производная Фреше оператора M в точке $u \in \mathfrak{U}$.

(A4) Фазовым пространством уравнения (3) служит простое банахово C^∞-многообразие. (Напомним [1], что банахово C^r-многообразие, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, называется простым, если любой его атлас эквивалентен атласу, содержащему единственную карту).

Цель настоящей работы – снять требование простоты многообразия в (A4), чтобы можно было доказать существование устойчивого и неустойчивого инвариантных многообразий задачи (1), (2).

1. Теорема Адамара – Перрона

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства; операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линеен и непрерывен), $M \in Cl(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линеен, замкнут и плотно определен), $N \in C^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Пусть выполнены условия (A1), (A2), тогда [3, гл. 4 и гл. 5] существует расщепление фазового пространства $\mathfrak{U}^1$ уравнения $L\dot{u} = Mu$ в прямую сумму $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}^s \oplus \mathfrak{U}^u$ экспоненциально устойчивого и неустойчивого инвариантных пространств этого уравнения. Пусть выполнено следующее условие.

(A5) Фазовое пространство $\mathfrak{M}$ уравнения (3) таково, что $\mathfrak{M} \ni 0$, и существует окрестность $\mathfrak{O}_0 \subset \mathfrak{M}$, C^∞-диффеоморфно проектирующаяся вдоль $\mathfrak{U}^0$ на окрестность $\mathfrak{O}_0^1 \subset \mathfrak{U}^1$.

Определение 1. Множество $\mathfrak{M}^s = \{u_0 = \mathfrak{O}_0 : \ \|P_s u_0\| \leq R_1, \ \|u(t,u_0)\| \ \leq \ R_2, \ t \ \in \ \mathbb{R}_+\}$ ($\mathfrak{M}^u = \{u_0 \in \mathfrak{O}_0 : \ \|P_u u_0\| \leq R_1, \ \|u(t,u_0)\| \leq R_2, \ t \in \mathbb{R}_-\}$) такое, что

(i) $\mathfrak{M}^{s(u)}$ C^∞-диффеоморфно замкнутому шару в $\mathfrak{U}^{s(u)}$ с центром в начале координат радиуса R_1;

(ii) $\mathfrak{M}^{s(u)}$ касается $\mathfrak{U}^{s(u)}$ в начале координат;

(iii) при любом $u_0 \in \mathfrak{M}^{s(u)}$ $\|u(t,u_0)\| \to 0$ при $t \to +\infty$ $(t \to -\infty)$

называется *устойчивым (неустойчивым) инвариантным многообразием* уравнения (32).

Здесь через $P_{s(u)}$ обозначен проектор вдоль $\mathfrak{U}^{u(s)} \oplus \mathfrak{U}^0$ на $\mathfrak{U}^{s(u)}$; через $u(t,u_0)$ обозначено решение задачи Коши $u(0) = u_0$ для уравнения (3). Существование и единственность такого решения (*квазистационарной траектории* [4]) при $t \in (-\tau, \tau)$ следует из существования фазового пространства (условие (A5)). Заметим еще, что определение 1 имеет менее локальный характер, чем его прототип в [2].

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (A1) – (A3) и (A5). Тогда существуют устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия уравнения (3). Причем, если для некоторого $u_0 \in \mathfrak{O}_0$ имеет место $\|P_{e(r)} u_0\| \leq R_1$ и $\|u(t,u_0)\| \leq R_2$ при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$, то $u_0 \in \mathfrak{M}^s \cup \mathfrak{M}^u$.*

Внимательный анализ доказательства прототипа этой теоремы в [2] показывает, что без потери общности можно заменить (A4) условием (A5). По традиции, восходящей к В.И. Арнольду [5, гл. 3, § 4], утверждения о существовании устойчивого и неустойчивого инвариантных многообразий принято называть *теоремами Адамара – Перрона.* Заметим еще, что непустота устойчивого (неустойчивого) инвариантного многообразия находится в прямой зависимости от непустоты компоненты $\sigma^L_{e(r)}(M)$ L-спектра оператора M, т.е. если $\sigma^L_{e(r)}(M) = \emptyset$, то $\mathfrak{M}^{e(r)} = \{0\}$. Поэтому формулировка теоремы содержит все возможные варианты.

2. Инвариантные многообразия

Следуя [1], редуцируем задачу (1), (2) к уравнению (3). Для этого пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ положим как в [1]; и формулами

$$\langle Lu, v\rangle = \int\limits_a^b (u_x v_x + \lambda uv)\, dx,$$

$$\langle Mu, v\rangle = -v \int\limits_a^b u_x v_x \, dx,$$

$$\langle N(u), v\rangle = -\int\limits_a^b u u_x v \, dx, \ u, \, v \in \mathfrak{U}$$

зададим операторы $L,\ M,\ N:\ \mathfrak{U}\to\mathfrak{F}$. Аналогично [1] нетрудно получить следующий результат.

Лемма 1.

(i) При всех $\lambda,\nu\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ *операторы* $L, M\in\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, *причем оператор* M $(L,0)$-*ограничен.*

(ii) Оператор $N\in C^{\infty}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Итак, в силу (i) леммы 1 условие (A1) выполнено. Далее, поскольку $\langle N'_u v, w\rangle = -\int\limits_a^b (uv)_x w\,dx$, то условие (A3) тоже выполнено. Теперь пусть $\{\lambda_k\}$ – собственные значения однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $\langle \Delta u, v\rangle = -\int\limits_a^b u_x v_x\,dx$ на интервале (a,b), занумерованные по убыванию, тогда L-спектр оператора M будет иметь следующий вид:

$$\sigma^L(M)=\left\{\mu_k=\frac{\nu\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}:\ k\in\mathbb{N}\backslash\{l:\ \lambda=\lambda_l\}\right\}.$$

Если взять $\nu\in\mathbb{R}_+$ (что соответствует физическому смыслу), то при любых $\lambda\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ только конечное множество (возможно, пустое) точек μ_k может оказаться в правой полуплоскости комплексной плоскости, а все остальные точки будут находиться в левой полуплоскости, накапливаясь к точке $-\nu$, причем $\sigma^L(M)\cap\{i\mathbb{R}\}=\emptyset$. Значит, условие (A2) тоже выполнено.

Для проверки условия (A5) построим фазовое пространство задачи (1), (2).

$$\mathfrak{M}=\begin{cases}\mathfrak{U},\ \lambda\notin\{\lambda_k\},\\ \{u\in\mathfrak{U}:\ \langle Mu+N(u),\varphi_l\rangle=0,\ \lambda=\lambda_l\}.\end{cases}$$

Здесь φ_l – нормированный в смысле $L_2(a,b)$ собственный вектор оператора Лапласа, соответствующий λ_l. Если $\lambda\notin\{\lambda_k\}$, то условие (A5) очевидно выполняется. Пусть $\lambda=\lambda_l$, тогда, как показано в [1], фазовое пространство состоит из двух связных компонент, каждая из которых моделируется одним из полупространств $\mathfrak{U}^1_-=\{v\in\mathfrak{U}^1:\ \langle v,(\varphi_l^2)_x\rangle<4\lambda\nu\}$, $\mathfrak{U}^1_+=\{v\in\mathfrak{U}^1:\ \langle v,(\varphi_l^2)\rangle>4\lambda\nu\}$. При любых $\nu\in\mathbb{R}_+$, $\lambda\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ одно из этих полупространств обязательно содержит окрестность нуля, куда диффеоморфно проектируется окрестность нуля одной из компонент фазового пространства. Таким образом, условие (A5) выполнено и при $\lambda=\lambda_l$. Итак, доказана

Теорема 2. *При любых* $\lambda\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\nu\in\mathbb{R}_+$ *задача (1), (2) имеет не более чем конечномерное неустойчивое и бесконечномерное устойчивое инвариантные многообразия.*

Автор искренне признателен Г. А. Свиридюку за постановку задачи и полезные дискуссии.

Литература

1. Свиридюк, Г. А. Фазовое пространство задачи Коши-Дирихле для одного неклассического уравнения / Г. А. Свиридюк, А. В. Анкудинов // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 11. – С. 1556 – 1661.
2. Китаева, О. Г. Устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия уравнения Осколкова / О. Г. Китаева, Г. А. Свиридюк // Неклассические уравнения математической физики: сб. тр. – Новосибирск, 2005. – С. 261 – 267.

3. Sviridyuk, G. A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. – Utrecht – Boston – Köln – Tokyo: VSP, 2003.
4. Свиридюк, Г. А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г. А. Свиридюк // Изв. Рос. Акад. наук, сер. матем. – 1993. – Т. 57, № 3. – С. 192 – 207.
5. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд, Ю.С. Ильяшенко // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 1. – М., 1985. – С. 7 – 150.

Кафедра математического анализа,
Южно-Уральский государственный университет
shipilov@mail.ru

Поступила в редакцию 26 февраля 2009 г.