УДК 517.9

РЕКОНСТРУКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ДИНАМИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

А.И. Короткий

Рассматривается задача о восстановлении априори неизвестных распределенных управлений в гиперболических динамических системах по результатам приближенных измерений состояний (скоростей) наблюдаемого движения системы. Задача решается в динамическом варианте, когда для определения текущего приближения неизвестного управления разрешено использовать только поступившие в данный момент приближенные измерения, реконструкция управления должна осуществляться в динамике (по ходу процесса, по ходу движения системы). Рассматриваемая задача некорректна. Для решения задачи предлагается воспользоваться методом динамической регуляризации, разработанным Ю.С. Осиповым и его школой. Построены новые модификации динамических регуляризующих алгоритмов решения задачи, которые в отличие от традиционных алгоритмов позволяют получить усиленную сходимость регуляризованных приближений, в частности получить кусочно-равномерную сходимость. Выполнена конечномерная аппроксимация задачи. Приводятся результаты численного моделирования, которые позволяют судить о способности модифицированных алгоритмов восстанавливать тонкую структуру искомых управлений.

Ключевые слова: динамическая система, управление, реконструкция, метод динамической регуляризации, кусочно-равномерная сходимость.

Введение

В данной работе, продолжающей исследования [1–7], изучается задача о реконструкции (восстановлении, идентификации) неизвестных распределенных управлений, функционирующих в управляемой линейной гиперболической системе. Управляющие воздействия в динамической системе могут быть заранее неизвестны и должны быть определены по результатам наблюдений за системой в виде приближенных измерений текущих фазовых состояний (скоростей) системы, которые поступают наблюдателю в динамике в течение заданного промежутка времени. Для определения текущего приближения неизвестного управления разрешено использовать только поступившие в данный момент приближенные измерения скорости системы. Хорошо известно [1–7], что рассматриваемая задача некорректна и для ее решения необходимо использовать методы регуляризации [8–10]. Для решения задачи предлагается воспользоваться методом, разработанным Ю.С. Осиповым и его школой, — методом динамической регуляризации [2–6]. В работе построены и обоснованы новые модификации динамических регуляризующих алгоритмов решения задачи, которые в отличие от традиционных алгоритмов позволяют получить сходимость регуляризованных приближений не только в пространствах Лебега, но и получить усиленную сходимость, в частности, поточечную, кусочно-равномерную, сходимость вариаций. Выполнена конечномерная аппроксимация задачи восстановления, основанная на методе разделения переменных. Приводятся результаты численного моделирования, показывающие работоспособность построенных алгоритмов и их способность восстанавливать тонкую структуру искомых управлений (разрывы, импульсы, всплески, близкие пики).

1. Постановка задачи

Опишем содержательную сторону задачи. Рассматривается управляемая динамическая система, состояние которой в момент времени t из заданного ограниченного отрезка времени $T = [t_0, \vartheta]$ $(-\infty < t_0 < \vartheta < +\infty)$ характеризуется парой функций $z[t] = (\, y[t], y_t[t]\,) = (\, y(t,\cdot), y_t(t,\cdot)\,)$, определенных в некоторой области Ω евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$. Эволюция состояний во времени (движение системы) описывается гиперболической краевой задачей [11, 12]

$$y_{tt} = L\,y + f\,u, \quad (t,x) \in Q = T \times \Omega, \tag{1}$$

$$y(t_0,x) = y_0(x), \quad y_t(t_0,x) = y_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$y(t,x) = 0, \quad t \in T, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \tag{3}$$

где L — заданный линейный эллиптический дифференциальный оператор

$$L\,y = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\, x_i}\Big(\, a_{ij}(t,x)\frac{\partial\, y}{\partial\, x_j}\,\Big) - \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\frac{\partial\, y}{\partial\, x_i} - a(t,x)\,y;$$

$f = f(x) = (f_1(x),\ldots,f_m(x))$, $x \in \Omega$, — заданная векторная функция; $u = u(t) = (u_1(t),...,u_m(t))$, $t \in T$, — векторное управляющее воздействие на систему; $y_0 = y_0(x)$, $x \in \Omega$, — начальное положение системы; $y_1 = y_1(x)$, $x \in \Omega$, — начальная скорость системы.

Допустимые управления подчинены заданным геометрическим ограничениям

$$u(t) \in P \subset \mathbb{R}^m, \quad t \in T.$$

Пусть за управляемой динамической системой и ее движением $z = z[t] = (\, y[t], y_t[t]\,)$, $t \in T$, осуществляется наблюдение в течение промежутка времени T и в соответствующие текущие моменты времени $t \in T$ приближенно измеряется скорость системы $y_t[t]$, причем результат этих измерений $y_t^{(\delta)}[t]$ удовлетворяет следующему условию точности измерений

$$\big\|\, y_t^{(\delta)}[t] - y_t[t]\,\big\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \delta, \quad t \in T, \tag{4}$$

где δ — числовой параметр, характеризующий точность измерений, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$.

Задача восстановления состоит в том, чтобы построить такой динамический алгоритм реконструкции управления, который по результатам $y_t^{(\delta)}[t]$, $t \in T$, приближенных измерений скорости наблюдаемого движения системы $z = z[t]$, $t \in T$, приближенно в динамике (по ходу процесса) определял бы (восстановливал) ту реализацию $u = u(t)$, $t \in T$, управляющего воздействия на динамическую систему, которая порождает наблюдаемое движение системы. При этом результат $u_\delta = u_\delta(t)$, $t \in T$, восстановления искомого управляющего воздействия $u = u(t)$, $t \in T$, должен быть тем точнее, чем меньше ошибки измерений

$$\big\|\, u_\delta - u\,\big\|_{L_2(T;\,\mathbb{R}^m)} \to 0, \quad \delta \to 0. \tag{5}$$

Задачу реконструкции можно трактовать как задачу нахождения подходящего отображения D (или семейства подходящих отображений D_δ, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$), которое переводит результаты приближенных измерений скорости системы в приближения к искомому управлению и обладает свойством устойчивости

$$D:\ y_t^{(\delta)} \to u_\delta \quad \big(\, D_\delta:\ y_t^{(\delta)} \to u_\delta\,\big)\,, \quad u_\delta \to u\,. \tag{6}$$

Рассматриваемой задаче можно дать следующую содержательную интерпретацию. В некоторой области Ω с границей Γ осуществляется движение среды под действием внешних массовых сил $F = f\,u$ с управляющей составляющей по времени u. Эта управляющая составляющая априори неизвестна. Движение среды в области Ω наблюдается в течение некоторого конечного отрезка времени $T = [t_0, \vartheta]$. По ходу процесса в текущие моменты времени $t \in T$ измеряется с некоторой ошибкой скорость смещения среды $y_t[t] = y_t(t,x)$, $x \in \Omega$. Результатом этих измерений в момент времени $t \in T$ является функция $y_t^{(\delta)}[t] = y_t^{(\delta)}(t,x)$, $x \in \Omega$, удовлетворяющая оценке (4). Требуется по поступающей по ходу движения системы информации $y_t^{(\delta)}[t])$, $t \in T$, о приближенной скорости среды приближенно в динамике (по ходу процесса) восстановить реализацию того управления $u = u(t)$, $t \in T$, которое порождает наблюдаемое изменение среды $z[t] = (y[t], y_t[t])$, $t \in T$. При этом восстановление должно быть тем точнее, чем меньше ошибки измерений, а сам алгоритм восстановления должен обладать свойством вольтерровости или неупреждаемости (та часть управления, которая уже восстановлена по ходу процесса, в последующие моменты времени изменяться не должна).

Смысл понятия приближенного восстановления $u_\delta \approx u$ далее будет варьироваться и уточняться. Будут предложены такие алгоритмы восстановления, которые кроме традиционного среднеквадратичного приближения (5) обеспечат приближение в некотором более сильном смысле, приводящем к восстановлению тонкой структуры искомого управления. При этом предполагается, что при решении задачи восстановления известны априорные геометрические ограничения P на множество допустимых управлений и уравнения динамики процесса вместе с начальным состоянием $z_0 = (y_0, y_1)$.

Уточним постановку задачи. Пусть P — выпуклое компактное множество из $\mathbb{R}^m$; U — множество всех измеримых и интегрируемых с квадратом вектор-функций, которые при почти всех $t \in T$ принадлежат компакту P,

$$U = \{\, u \in E:\ u(t) \in P,\ t \in T \,\}, \quad E = L_2(T; \mathbb{R}^m),$$

множество U представляет собой множество всех допустимых управлений в задаче.

Будем считать, что Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей Γ (для дальнейшего достаточно, чтобы область Ω обладала, например, свойствами [12, с. 212, 222]). Пусть $f \in L_2(\Omega; \mathbb{R}^m)$, $y_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $y_1 \in L_2(\Omega)$ и коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям [11, гл. 4, § 4]. Известно [11, гл. 4, § 4], что при указанных условиях на параметры краевой задачи (1)–(3) для каждого управления $u \in E$ существует единственное обобщенное решение $y = y(t,x) = y(t,x;u)$, $(t,x) \in Q$, этой краевой задачи из энергетического класса $W_2^1(Q)$, причем $y \in C(T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, $y_t \in C(T; L_2(\Omega))$. Движение системы, порожденное управлением $u \in E$, иногда будем обозначать символом $z = z[\,\cdot\,; u]$ или детальнее $z = z[\,\cdot\,; u] = (\,y[\,\cdot\,; u], y_t[\,\cdot\,; u]\,)$. Пространство $H = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ является фазовым пространством наблюдаемой системы (1)–(3).

Пусть $Z = \{\, z[\cdot; u]:\ u \in U \,\}$ обозначает множество всех возможных движений системы (1)–(3), отвечающих всем возможным управлениям $u \in U$. Для каждого движения $z = (y, y_t) \in Z$ введем множество $U(z) = \{\, u \in U:\ z[\cdot; u] = z \,\}$ всех допустимых управлений, порождающих данное движение, и множество $Y_\delta(z) = \{\, \xi \in Y:\ \|\,\xi[t] - y_t[t]\,\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \delta,\ t \in T \}$ всех возможных измерений скорости этого движения, $Y = L_2(T; L_2(\Omega))$.

Пусть далее W обозначает банахово пространство $W = \{\, u \in E:\ V[u] < \infty \,\}$ с нормой $\|\,u\,\|_W = \|\,u\,\|_E + V[\,u\,]$, где $V[\,u\,]$ — полная вариация функции $u: T \ni t \to u(t) \in \mathbb{R}^m$ [13].

Опишем класс отображений (алгоритмов), в котором будем искать решение задачи восстановления (6). Следуя [2–6], решение задачи будем искать в классе семейств конечношаговых динамических алгоритмов (КДА) $D = \{\, D_\delta^\sigma:\ \sigma \in \Sigma,\ \delta \in [0, \delta_0] \,\}$, где Σ — множество всех конечных разбиений σ отрезка T. Каждый КДА формализуем в виде тройки [2]

$$D_\delta^\sigma = \big(\, (t_i)_{i=0}^{l};\ (E_i)_{i=0}^{l-1};\ (F_i)_{i=0}^{l-1} \,\big),$$

где $(t_i)_{i=0}^{l}$ — точки разбиения σ отрезка времени T: $t_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{l-1} < t_l = \vartheta$; E_i — отображение, которое позиционным способом формирует на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ приближение к искомому управлению; F_i — отображение, формирующее позиционным способом движение некоторой вспомогательной системы-модели (поводыря $[1,2]$) на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ в фазовом пространстве H.

Детализируем представленные алгоритмы. Пусть задано какое-либо разбиение σ отрезка времени T точками $(t_i)_{i=0}^{l}$, $t_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{l-1} < t_l = \vartheta$. Пусть U_i — сужение функций из U на отрезок $[t_i, t_{i+1}]$; W_i — сужение функций из W на $[t_i, t_{i+1}]$; E_i — отображение $L_2(\Omega) \times L_2(\Omega) \times P \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ в $S_i = U_i \cap W_i$; F_i — отображение $H \times S_i$ в H. Последними двумя аргументами отображения E_i являются числовые параметры α и ε из $\mathbb{R}_+$, которые будут выбираться в зависимости от величины погрешности измерений δ, т.е. будут являться параметрами регуляризации. Разбиение σ отрезка T также будет выбираться в зависимости от величины погрешности измерений δ, причем так, чтобы диаметр $d = d(\sigma(\delta))$ разбиения стремился к нулю при $\delta \to 0$. Можно считать, что $d(\sigma(\delta)) \leqslant \varphi(\delta)$, где $\varphi(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Введем теперь понятие реализации алгоритма. Для алгоритма D_δ^σ, каких-либо чисел $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ и функции $\xi \in Y$ назовем (D_δ^σ, ξ)-реализацией алгоритма управление $u_\delta \in S = U \cap W$, сформированное по правилу:

$$u_\delta(\tau) = u_\delta^i(\tau) = E_i\big(\xi[t_i],\, \widetilde{z}_t[t_i],\, u_\delta^{i-1}(t_i),\, \alpha,\, \varepsilon\big), \quad \tau \in [t_i, t_{i+1}), \quad i = 0, \dots, l-1,$$

$$\widetilde{z}[t_0] = z_0\,, \quad \widetilde{z}[t_{i+1}] = F_i\big(\,\widetilde{z}[t_i],\, u_\delta^i\,\big)\,, \quad i = 0, \dots, l-1.$$

Для корректного формирования реализации алгоритма необходимо определить значение $u_\delta^{i-1}(t_i)$ при $i = 0$. В связи с этим предположим, что все допустимые управления в начальный момент времени $t = t_0$ принимают значение $u^{(0)} \in P$ и для каждого движения $z \in Z$ известно некоторое приближение $u_z^{(h)} \in P$ значения $u^{(0)}$ в начальный момент времени, причем

$$\|\, u_z^{(h)} - u^{(0)} \,\|_{\mathbb{R}^m} \leqslant h, \quad h \in [0, h_0]\,.$$

Определим теперь значение $v_\delta^{-1}(t_0)$ равенством $v_\delta^{-1}(t_0) = u_z^{(h)}$. Точность приближения будем считать зависящей от точности измерений δ, $h = h(\delta)$.

В соответствии с правилом формирования реализации алгоритма, управления u_δ^i и состояния поводыря $\widetilde{z}[t_i]$ будут последовательно вычисляться по ходу движения системы (в режиме реального времени). К конечному моменту времени $t = \vartheta$ в динамике будет сформирована вся реализация алгоритма u_δ, определенная на отрезке T (в момент времени $t = \vartheta$ значение $u_\delta(\vartheta)$ определяется значением $u_\delta^{l-1}(\vartheta)$ или произвольным значением из P).

Работа алгоритма во времени (формирование (D_δ^σ, ξ)-реализации) подробно формально и неформально по шагам описана в [2–6]. Далее (D_δ^σ, ξ)-реализацию иногда будем обозначать также символом $D_\delta^\sigma(\xi)$. Реализация алгоритма — это и есть выход КДА.

Скажем, что семейство алгоритмов $D = \{\, D_\delta^\sigma :\ \sigma \in \Sigma,\ \delta \in [0, \delta_0] \,\}$ регуляризирует задачу (6) на множестве $Z_0 \subseteq Z$, если при некотором выборе зависимостей $\sigma = \sigma(\delta)$, $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ для любого $z \in Z_0$ имеет место сходимость

$$r_\delta(z) \to 0\,,\ \delta \to 0\,,$$

где

$$r_\delta(z) = \sup\big\{\, \rho\big[\, D_\delta^\sigma(\xi),\, U(z) \,\big] :\ \xi \in Y_\delta(z) \,\big\}\,,$$

$$\rho\big[\, D_\delta^\sigma(\xi),\, U(z) \,\big] = \min\big\{\, \|\, D_\delta^\sigma(\xi) - v \,\|_E :\ v \in U(z) \,\big\}\,.$$

Задача реконструкции. Требуется построить семейство алгоритмов D, регуляризующее задачу (6) на множестве Z или некотором его подходящем подмножестве $Z_0 \subseteq Z$.

Все рассматриваемые в работе числовые величины и пространства считаются вещественными, измеримость и интегрируемость понимаются по Лебегу, определения используемых пространств имеются в [11–13].

2. Решение задачи

Введем обозначения:

$$\Phi_i(\,u\,) = \Phi_i(\,u;\,\eta,\,\zeta\,) = 2\left\langle \eta-\zeta\,,\, f\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} u(\tau)\,d\tau \right\rangle_{L_2(\Omega)} + \alpha\,\Lambda_{t_i}^{t_{i+1}}[\,u\,],$$

$$\Phi_i^* = \Phi_i^*(\,w\,) = \min\left\{\,\Phi_i(\,u\,):\; u\in S[\,t_i,\,t_{i+1};\,w\,]\,\right\}, \tag{7}$$

$$\Lambda_t^\tau[\,u\,] = \int\limits_t^\tau \|\,u(s)\,\|^2_{\mathbb{R}^m} d\,s + V_t^\tau[\,u\,]\,,$$

$V_t^\tau[\,u\,]$ — полная вариация функции u на отрезке $[t,\tau]$, $S[\,t_i,\,t_{i+1};\,w\,] = \{\,u\in S_i:\; u(t_i)=w\,\}$.

Приступим к построению искомых алгоритмов. Фиксируем $\delta\in[0,\delta_0]$, разбиение $\sigma\in\Sigma$ отрезка T точками $(t_i)_{i=0}^l$, $i\in\{0,\dots,l-1\}$, $\eta\in L_2(\Omega)$, $\zeta\in L_2(\Omega)$, $w\in P$, $\alpha\in\mathbb{R}_+$, $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$. Определим значение отображения E_i в точке $(\eta,\,\zeta,\,w,\,\alpha,\,\varepsilon)$ равенством

$$E_i(\,\eta,\,\zeta,\,w,\,\alpha,\,\varepsilon\,) = u_\delta^i\,, \tag{8}$$

где u_δ^i есть элемент множества $S[\,t_i,\,t_{i+1};\,w\,]$, удовлетворяющий условию

$$\Phi_i^* \leqslant \Phi_i(\,u_\delta^i\,) \leqslant \Phi_i^* + \varepsilon\,(t_{i+1}-t_i),$$

параметр ε характеризует точность по функционалу решения экстремальной задачи (7).

Значение $\widetilde{z}$ внутренней переменной, имеющей смысл состояния вспомогательной системы-модели, в начальный момент времени t_0 положим равным z_0, $\widetilde{z}[t_0]=z_0$. В последующие моменты времени $t_{i+1}\in T$, $i\in\{0,\dots,l-1\}$, элемент $\widetilde{z}[t_{i+1}] = (\,\widetilde{y}[t_{i+1}],\,\widetilde{y}_t[t_{i+1}]\,)$ находится из решения краевой задачи

$$\widetilde{y}_{tt} = L\,\widetilde{y} + f\,u_\delta^i,\quad (t,x)\in[t_i,t_{i+1}]\times\Omega,$$

$$\widetilde{y}(t_i,x) = \widetilde{y}[t_i](x),\quad \widetilde{y}_t(t_i,x) = \widetilde{y}_t[t_i](x),\quad x\in\Omega,$$

$$\widetilde{y}(t,x) = 0,\quad t\in[t_i,t_{i+1}],\quad x\in\Gamma\,,$$

и определяется равенством

$$\widetilde{z}[t_{i+1}] = \left(\,\widetilde{y}(t_{i+1},\cdot),\,\widetilde{y}_t(t_{i+1},\cdot)\,\right) = F_i\left(\,\widetilde{z}[t_i],\,v_\delta^i\,\right). \tag{9}$$

Работа КДА (формирование $D_\delta^\sigma(\xi)$-реализации) протекает во времени по следующей схеме. Пусть наблюдение осуществляется за каким-либо движением $z\in Z$, результатом приближенных измерений скорости динамической системы служит функция $\xi\in Y_\delta(z)$. До начала процесса восстановления фиксируются зависимости $\alpha=\alpha(\delta)$, $\varepsilon=\varepsilon(\delta)$, $h=h(\delta)$, разбиение $\sigma=\sigma(\delta)\in\Sigma$ с диаметром $d=d(\sigma(\delta))\leqslant\varphi(\delta)$ и становится известным уровень погрешности измерений δ.

Шаг $i=0$. В начальный момент времени t_0 становится известным приближенное измерение $\xi[t_0]$ скорости системы $y_t[t_0]$. По предположению наблюдателю становится известным также приближенное значение $u_z^{(h)}$ восстанавливаемого управления u в начальный момент времени t_0. Положив $\eta=\xi[t_0]$, $\zeta=\widetilde{y}_t[t_0]=y_1$, $w=u_z^{(h)}$, $\alpha=\alpha(\delta)$, $\varepsilon=\varepsilon(\delta)$, наблюдатель в момент времени t_0 находит значение $E_0(\eta,\zeta,w,\alpha,\varepsilon)=u_\delta^0$ по правилу (8). Найденное значение u_δ^0 принимается за приближение к искомому управлению u на отрезке времени $[t_0,t_1]$. Значение $u_\delta^0(t_1)$ запоминается для выполнения следующего шага. Далее по правилу (9) система-модель переводится из состояния $\widetilde{z}[t_0]$ в состояние $\widetilde{z}[t_1]=F_0(\widetilde{z}[t_0],u_\delta^0)$, которое запоминается для выполнения следующего шага.

Шаг $i = 1$. В момент времени t_1 наблюдателю поступает информация о скорости системы $y_t[t_1]$ в виде приближенного измерения $\xi[t_1]$. Положив $\eta = \xi[t_1]$, $\zeta = \widetilde{y}_t[t_1]$, $w = u_\delta^0(t_1)$, $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, наблюдатель в момент времени t_1 находит значение $E_1(\eta, \zeta, w, \alpha, \varepsilon) = u_\delta^1$ по правилу (8). Найденное значение u_δ^1 принимается за приближение к искомому управлению u на отрезке времени $[t_1, t_2]$. Значение $u_\delta^1(t_2)$ запоминается для выполнения следующего шага. Далее по правилу (9) поводырь переводится из состояния $\widetilde{z}[t_1]$ в состояние $\widetilde{z}[t_2] = F_1(\widetilde{z}[t_1], u_\delta^1)$, которое запоминается для выполнения следующего шага.

По мере поступления новых измерений $\xi[t_2]$, $\xi[t_3]$, $\ldots$, $\xi[t_{l-1}]$, аналогично шагу $i = 1$ последовательно определяются функции u_δ^2, u_δ^3, $\ldots$, u_δ^{l-1} на отрезках $[t_2, t_3]$, $[t_3, t_4]$, $\ldots$, $[t_{l-1}, t_l]$ соответственно. Таким образом, в динамике к конечному моменту времени $t_l = \vartheta$ будет получена полная $D_\delta^\sigma(\xi)$-реализация алгоритма u_δ. Из описания работы КДА во времени видны возможность его осуществления в режиме реального времени и его вольтерровость.

Обозначим через $\mu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ модуль непрерывности множества движений Z, рассматриваемых как отображения $T \ni t \to z[t] \in H$ (он существует в силу компактности множества Z в пространстве $C(T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)) \times C(T; L_2(\Omega)) \cong C(T; H)$),

$$\left\| z[t_1] - z[t_2] \right\|_H \leqslant \mu\left(| t_1 - t_1 | \right), \quad t_1 ,\ t_1 \in T .$$

Пусть Z_0 есть множество всех движений $z \in Z$, для которых $S(z) = U(z) \cap S[t_0, \vartheta; u^{(0)}] \neq \varnothing$ и пусть $\widehat{u} = \widehat{u}(z)$ для $z \in Z_0$ есть Λ-нормальный элемент множества $S(z)$, т.е. элемент, минимизирующий на множестве $S(z)$ функционал $\Lambda = \Lambda[\, u\,] = \Lambda_{t_0}^{\vartheta}[\, u\,]$ (такой элемент существует и является единственным).

Теорема 1. *Пусть параметры регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, $\varphi = \varphi(\delta)$, $h = h(\delta)$ и модуль непрерыности $\mu = \mu(\delta)$ удовлетворяют условиям согласования*

$$\Big(\mu(\delta) + \varepsilon(\delta) + \delta \Big)\, \alpha(\delta)^{-1} \to 0,\ \varepsilon(\delta) \to 0,\ \varphi(\delta) \to 0,\ h(\delta) \to 0,\ \alpha(\delta) \to 0, \quad \delta \to 0,$$

тогда семейство КДА D, состоящее из алгоритмов (8)-(9), является регуляризирующим на множестве Z_0. Кроме того, какие бы ни случились реализации измерений $\xi \in Y_\delta(z)$, для $D_\delta^\sigma(\xi)$-реализаций алгоритма u_δ при $\delta \to 0$ имеют место следующие сходимости: 1) $u_\delta \to \widehat{u}$ сильно в E; 2) $u_\delta(t) \to \widehat{u}(t)$ в $\mathbb{R}^m$ поточечно на T; 3) $V[\, u_\delta\,] \to V[\, \widehat{u}\,]$; 4) $u_\delta(t) \to \widehat{u}(t)$ в $\mathbb{R}^m$ равномерно по t на любом отрезке, не содержащем точек разрыва функции $\widehat{u}$. Имеет место также сходимость движения поводыря к наблюдаемому движению системы $\widetilde{z}[\,\cdot; u_\delta\,] \to z[\,\cdot; \widehat{u}\,]$ в $C(T; H)$ при $\delta \to 0$.

Доказательство. Обоснование проводится аналогично [2–7] и основано на установлении равномерной оценки

$$\Xi(t) \leqslant \delta^2 + C\, \Big(\mu(\delta) + \varepsilon(\delta) + \delta \Big), \quad t \in T ,$$

для оценочного функционала

$$\Xi(t) = \left\| z[\, t; \widehat{u}\,] - \widetilde{z}[\, t; u_\delta\,] \right\|_H^2 + \alpha\, \Lambda_{t_0}^t(\, u_\delta\,) - \alpha\, \Lambda_{t_0}^t(\, \widehat{u}\,) . \tag{10}$$

Далее обычным способом доказываются сходимости

$$u_\delta \to \widehat{u} \ \text{ сильно в } \ E , \quad u_\delta(t) \to \widehat{u}(t) \ \text{ в } \ \mathbb{R}^m \ \text{ поточечно на } \ T , \quad V[\, u_\delta\,] \to V[\, \widehat{u}\,] ,$$

из которых с применением результатов [13, гл. 4] выводится кусочно-равномерная сходимость регуляризованных приближений. □

3. Аппроксимация задачи

Восстановление управлений в системе (1)–(3) на основе результатов предыдущего параграфа связано с минимизацией функционалов и пересчетом состояний поводыря в бесконечномерных пространствах. Для численной реализации алгоритма требуется конечномерная аппроксимация задачи. Опишем способ аппроксимации задачи реконструкции, основанный на методе разделения переменных.

Пусть дифференциальный оператор в краевой задаче (1)–(3) имеет вид

$$L\,y = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\,x_i}\Big(\,a_{ij}(x)\,\frac{\partial\,y}{\partial\,x_j}\,\Big) - a(x)\,y, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad a(x) \geqslant a_0 = \mathrm{const} \geqslant 0.$$

Тогда решение краевой задачи (1)–(3) представимо в виде ряда Фурье

$$y = y(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty}\, y_j\,(t)\,\omega_j\,(x), \qquad t \in T, \quad x \in \Omega.$$

Коэффициенты ряда удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\ddot{y}_j\,(t) = -\lambda_j\;y_j\,(t) + f^{(j\,)}\,u(t), \quad t \in T, \quad f^{(j\,)} = \langle\, f, \omega_j\,\rangle_{L_2(\Omega)},$$

$$y_j\,(t_0) = y_{0j} = \langle\, y_0\,, \omega_j\,\rangle_{L_2(\Omega)}\,, \quad \dot{y}_j\,(t_0) = y_{1j} = \langle\, y_1, \omega_j\,\rangle_{L_2(\Omega)}\,, \quad j \in \mathbb{N}\,,$$

где $\{\,\lambda_j\,, \omega_j:\ j \in \mathbb{N}\,\}$ — решение в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ спектральной задачи

$$L\,\omega = -\lambda\,\omega,\ x \in \Omega; \quad \omega = 0,\ x \in \Gamma; \quad \langle\,\omega, \omega\,\rangle_{L_2(\Omega)} = 1.$$

Известно [11, 12], что спектральная задача разрешима для счетного набора вещественных положительных чисел λ_j, $j \in \mathbb{N}$, каждое из которых имеет конечную кратность и которые можно упорядочить (с учетом их кратности) в порядке возрастания. Соответствующие собственным числам λ_j собственные функции ω_j образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$, базис в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ и $W^2_{2,\,0}(\Omega) = W^2_2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$.

Легко найти

$$y_j\,(t) = y_j\,(t;u) = y_{0j}\,\cos\Big(\sqrt{\lambda_j}\,\ (t - t_0)\Big) + y_{1j}\,(\,\lambda_j\,)^{-1/2}\,\sin\Big(\sqrt{\lambda_j}\,\ (t - t_0)\Big) +$$
$$+ (\,\lambda_j\,)^{-1/2}\,f^{(j\,)}\int_{t_0}^{t} u(\tau)\,\sin\Big(\sqrt{\lambda_j}\,\ (t - \tau)\Big)\,d\tau\,.$$

Решение задачи реконструкции будем искать в виде семейства алгоритмов $D = \{\,D^{\sigma,\,k}_{\delta} : \delta \in [0, \delta_0],\ \sigma \in \Sigma,\ k \in \mathbb{N}\,\}$, состоящего из троек

$$D^{\sigma,\,k}_{\delta} = \big(\,(t_i)^{l}_{i=0};\ (E^k_i)^{l-1}_{i=0};\ (F^k_i)^{l-1}_{i=0}\,\big),$$

где $(t_i)^l_{i=0}$ — точки разбиения $\sigma \in \Sigma$; E^k_i — отображение $L_2(\Omega) \times \mathbb{R}^k \times P \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ в S_i; F^k_i — отображение $\mathbb{R}^{2\,k} \times S_i$ в $\mathbb{R}^{2\,k}$ (смысл отображений указан в предыдущем разделе).

Приступим к построению искомых алгоритмов. Фиксируем $\delta \in [0, \delta_0]$, $k \in \mathbb{N}$, разбиение $\sigma \in \Sigma$ отрезка T точками $(t_i)^l_{i=0}$, $i \in \{0, \ldots, l-1\}$, $\eta \in L_2(\Omega)$, $\zeta^{(k)} = (\zeta^{(k)}_1, \ldots, \zeta^{(k)}_N) \in \mathbb{R}^k$, $w \in P$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Определим значение E^k_i в точке $(\eta,\ \zeta^{(k)},\ w,\ \alpha,\ \varepsilon)$ равенством

$$E^k_i\big(\,\eta,\ \zeta^{(k)},\ w,\ \alpha,\ \varepsilon\,\big) = u^{k,\,i}_{\delta}\,, \tag{11}$$

где $u^{k,\,i}_{\delta}$ есть элемент множества $S[\,t_i,\ t_{i+1};\ w\,]$, удовлетворяющий условию

$$\Phi^{k,\,*}_i \leqslant \Phi^k_i\big(\,u^{k,\,i}_{\delta}\,\big) \leqslant \Phi^{k,\,*}_i + \varepsilon\,(t_{i+1} - t_i),$$

параметр ε характеризует точность по функционалу решения экстремальной задачи

$$\Phi_i^{k,*} = \Phi_i^{k,*}(w) = \min \left\{ \Phi_i^k(u) : \ u \in S[t_i, t_{i+1}; w] \right\}, \tag{12}$$

$$\Phi_i^k(u) = \Phi_i^k(u;\, \eta,\, \zeta^{(k)}) = \sum_{j=1}^{k} 2 \Big(\langle \eta, \omega_j \rangle_{L_2(\Omega)} - \zeta_j^{(k)} \Big) f^{(j)} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(t)\, dt \, + \, \alpha\, \Lambda_{t_i}^{t_{i+1}}(u)\,.$$

Значение $z^{(k)} \in \mathbb{R}^{2\,k}$ внутренней переменной, имеющей смысл состояния поводыря (вспомогательной конечномерной системы-модели), в начальный момент времени t_0 положим равным $z^{(k)}[t_0] = (\, y^{(k)}(t_0), \dot{y}^{(k)}(t_0)\,)$, где $y^{(k)}(t_0) = (y_{01}, \ldots, y_{0\,k})$, $\dot{y}^{(k)}(t_0) = (y_{11}, \ldots, y_{1\,k})$. В последующие моменты времени $t_{i+1} \in T$, $i \in \{0, \ldots, l-1\}$, элемент $z^{(k)}[t_{i+1}] = (\, y^{(k)}(t_{i+1}), \dot{y}^{(k)}(t_{i+1})\,)$ находится из решения задачи Коши

$$\ddot{y}_j(t) = -\lambda_j\, y_j(t) + f^{(j)}\, u_\delta^{k,\,i}(t), \quad t \in [t_i, t_{i+1}],$$

$$y_j(t_i) = y_j^{(k)}[t_i], \quad \dot{y}_j(t_i) = \dot{y}_j^{(k)}[t_i], \quad j = 1, \ldots, k\,,$$

и определяется равенством

$$z^{(k)}[t_{i+1}] = \big(\, y^{(k)}(t_{i+1}), \dot{y}^{(k)}(t_{i+1})\,\big) = F_i^k\, \big(\, z^{(k)}[\,t_i\,],\, u_\delta^{k,\,i}\,\big)\,, \tag{13}$$

где $y^{(k)}(t) = (\, y_1(t), \ldots, y_k(t)\,)$, $\dot{y}^{(k)}(t) = (\, \dot{y}_1(t), \ldots, \dot{y}_k(t)\,)$.

Работа алгоритма $D_\delta^{\sigma,\,k}$ во времени аналогична работе алгоритма D_δ^σ и подробно описана в предыдущем разделе. Обозначим $D_\delta^{\sigma,\,k}(\xi)$-реализацию алгоритма через u_δ.

Перед формулировкой основного утверждения отметим, что для любых $t \in T$ и $u \in U$ справедлива равномерная оценка со сходящимся рядом [6]

$$\|\, y(t, \cdot; u)\,\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)} + \|\, y_{\,t}\,(t, \cdot; u)\,\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{j=1}^{\infty} \ \lambda_j\, y_j^2(t; u) + \sum_{j=1}^{\infty} \ \dot{y}_j^2(t; u) \leqslant \tag{14}$$

$$\leqslant 6 \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j\, y_{0j}^2 + 6 \sum_{i=j}^{\infty} y_{1j}^2 + 6\,(\,\vartheta - t_0)\, \Big(\max\left\{ \|\, u\,\|_E^2 : \ u \in U \right\} \Big) \sum_{j=1}^{\infty} \|\, f^{(j)}\,\|^2_{\mathbb{R}^m} < \infty\,,$$

из которой, в частности, следует, что в правой части (14) остаток ряда $R_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Опираясь на оценку (14) и свойства построенного семейства КДА, можно установить равномерную малость функционала (10), из которой, с учетом исследований [2–7, 13], вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть параметры регуляризации $k = k(\delta)$, $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, $\varphi = \varphi(\delta)$, $h = h(\delta)$ и модуль непрерывности $\mu = \mu(\delta)$ удовлетворяют условиям согласования*

$$\Big(\big(\, R_{k(\delta)}\,\big)^{1/2} + \mu(\delta) + \varepsilon(\delta) + \delta \Big)\ \alpha(\delta)^{-1} \to 0,$$

$$k(\delta) \to \infty,\ \alpha(\delta) \to 0,\ \varepsilon(\delta) \to 0,\ \varphi(\delta) \to 0,\ h(\delta) \to 0, \quad \delta \to 0,$$

тогда семейство КДА D, состоящее из алгоритмов (11) – (13), решает задачу реконструкции на множестве движений Z_0. Кроме того, какие бы ни случились реализации измерений $\xi \in Y_\delta(z)$, для $D_\delta^{\sigma,k}(\xi)$-реализаций алгоритма u_δ при $\delta \to 0$ имеют место следующие сходимости: 1) $u_\delta \to \widehat{u}$ сильно в E; 2) $u_\delta(t) \to \widehat{u}(t)$ в $\mathbb{R}^m$ поточечно на T; 3) $V[\,u_\delta\,] \to V[\,\widehat{u}\,]$; 4) $u_\delta(t) \to \widehat{u}(t)$ в $\mathbb{R}^m$ равномерно по t на любом отрезке, не содержащем точек разрыва функции $\widehat{u}$. Пусть $\widehat{z}^{(k)}[\,t; u] = \Big(\sum_{j=1}^k y_j^{(k)}(\,t; u)\,\omega_j\,,\, \sum_{j=1}^k \dot{y}_j^{(k)}(\,t; u)\,\omega_j \Big)$, тогда $\widehat{z}^{(k(\delta))}[\,\cdot\,; u_{\,\delta}\,] \to z[\,\cdot\,; \widehat{u}\,]$ в $C(T; H)$ при $\delta \to 0$.

4. Численное моделирование

Проведем численное моделирование задачи реконструкции в системе

$$y_{tt} = a^2\, y_{xx} + f(x)\, u(t)\,, \quad (t,x) \in Q = T \times \Omega\,,$$

$$y(0,x) = y_0(x)\,,\ y_t(0,x) = y_1(x)\,, \quad x \in \Omega = (0,b)\,,$$
$$y(t,0) = 0 = y(t,b)\,, \quad t \in T = [0,\vartheta]\,;$$

$$a = \mathrm{const} > 0\,, \quad f \in L_2(\Omega)\,, \quad y_0 \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)\,, \quad y_1 \in L_2(\Omega)\,.$$

Пусть множество геометрических ограничений на управления P есть отрезок

$$P = [\,\nu_1, \nu_2\,] \subset \mathbb{R}\,, \quad -\infty < \nu_1 < \nu_2 < +\infty\,,$$

измерение скорости динамической системы моделируется соотношением

$$\xi(t,x) = y_t\,(t,x) + \delta\, \varphi(t,x)\,, \quad \|\, \varphi(t,\cdot)\,\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant 1\,.$$

В данном конкретном случае

$$\lambda_j = (\,\pi\, j\,/b\,)^2\,, \quad \omega_j\,(x) = \sqrt{2/b}\,\sin(\sqrt{\lambda_j}\ x)\,, \quad j \in \mathbb{N}\,.$$

Опираясь на результаты предыдущего раздела, проведем конечномерную аппроксимацию и численное моделирование задачи реконструкции. Фиксируем какое-либо натуральное число $k \in \mathbb{N}$ и разбиение σ отрезка T точками $(t_i)_{i=0}^l$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{l-1} < t_l = \vartheta$. Последовательность действий при решении задачи реконструкции по шагам подробно описана выше. Одним из основных моментов при решении задачи является момент нахождения на отрезках $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0,\ldots,l-1$, приближенного решения экстремальной задачи (12). Эта экстремальная задача будет решаться методом проекции субградиента (целевой функционал, вообще говоря, не дифференцируем, но субдифференцируем). Предварительно дискретизируем задачу (12). Введем для этого на каждом из отрезков $[t_i, t_{i+1}]$ дополнительное равномерное разбиение с шагом τ. Подробные указания по дискретизации задач вида (12), нахождению субградиента целевого функционала и реализации метода проекции субградиента имеются в [7].

Погрешность измерений для дискретной задачи моделируется соотношениями

$$\xi^{(k)}_j(t) = \varkappa_j\, \sin(\beta_j\, t)\,, \quad \beta_j \in \mathbb{R}\,, \quad \varkappa_j \in \mathbb{R}_+\,, \quad \varkappa_1^2 + \cdots + \varkappa_k^2 \leqslant 1\,.$$

Численные эксперименты проводились при следующих параметрах задачи

$$a = 1, \quad \vartheta = 1, \quad b = 1, \quad \nu_1 = 0, \quad \nu_2 = 2, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 0, \quad k = 50,$$

$$f = \omega_1(x) + \cdots + \omega_k(x), \quad \varkappa_i = 1/\sqrt{k}, \quad i = 1,\ldots,k\,.$$

В качестве модельных восстанавливаемых управлений были выбраны две функции:

1) $u = u_{(1)}(t) = 1 - (1-t)\sin(\,25\, t^{3/2}\,)$ (гладкое управление);

2) $u = u_{(2)}(t) = \begin{cases} 0,7\,, & \text{если } \ t \in [0,2,\ 0,3]\,, \\ 1,4\,, & \text{если } \ t \in [0,55,\ 0,6]\,, \\ 2,0\,, & \text{если } \ t \in [0,88,\ 0,9]\,, \\ 0\,, & \text{иначе}, \qquad \text{(импульсное управление).} \end{cases}$

В обоих случаях начальной функцией в методе проекции субградиента служила сеточная аппроксимация функции $u^{[0]} = 0.1$. Зависимость параметра $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ от погрешности δ напрямую не контролировалась, точность решения экстремальной задачи определялась выбором количества итераций M в методе проекции субградиента. Разбиение σ считалось равномерным с шагом Δ. Полагалось также $h = 0$. Значения параметров алгоритма для каждой из задач восстановления модельного управления приведены в таблице. Результаты расчетов приведены на рис. 1 (восстановление гладкого управления $u_{(1)}$) и на рис. 2 (восстановление импульсного управления $u_{(2)}$), сплошной линией показано модельное восстанавливаемое управление, пунктирной линией — результат восстановления при $\delta = \delta_1$, линией с точками — результат восстановления при $\delta = \delta_2$. На рисунках горизонтальная ось — ось времени, вертикальная ось — ось значений управления.

Таблица

Значения параметров и результаты реконструкции

Параметр	Управление $u_{(1)}$	Управление $u_{(2)}$
$\delta = \delta_1\ (\delta_2)$	0,01 (0,0005)	0,01 (0,0002)
α	$0,8\,\delta$	$0,8\,\delta$
Δ	0,001	0,0005
τ	$0,1\,\Delta$	$0,1\,\Delta$
k	50	50
M	1000	5000
Невязка	0,0137 (0,0012)	0,4184 (0,1118)
Относительная погрешность	7,4396 (1,4351)	11,8291 (3,3218)

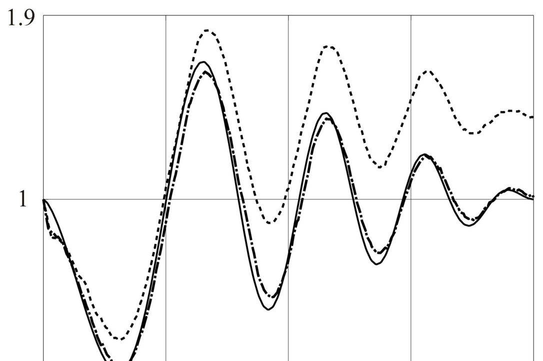

Рис. 1. Реконструкция управления $u_{(1)}$

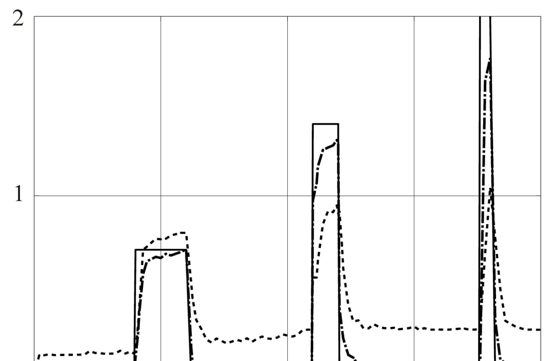

Рис. 2. Реконструкция управления $u_{(2)}$

Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН ≪Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках≫ при поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1009), поддержана программой АВЦП 1.994.2011 ≪Устойчивые вычислительные методы анализа динамики сложных систем≫ и поддержана РФФИ (проект 11-01-00073).

Литература

1. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. – М.: Наука, 1974.
2. Кряжимский, А.В. О моделировании управления в динамической системе / А.В. Кряжимский, Ю.С. Осипов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1983. – № 2. – С. 51–60.
3. Осипов, Ю.С. Основы метода динамической регуляризации / Ю.С. Осипов, Ф.П. Васильев, М.М. Потапов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.
4. Осипов, Ю.С. Методы динамического восстановления входов управляемых систем / Ю.С. Осипов, А.В. Кряжимский, В.И. Максимов. – Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011.
5. Короткий, А.И. Обратные задачи динамики управляемых систем с распределенными параметрами / А.И. Короткий // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 11. – С. 101–124.
6. Короткий, А.И. Прямые и обратные задачи управляемых систем с распределенными параметрами: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / А.И. Короткий; ИММ УрО РАН. – Екатеринбург, 1993.
7. Короткий, М.А. Восстановление управлений статическим и динамическим методами регуляризации с негладкими стабилизаторами / М.А. Короткий // Прикл. математика и механика. – 2009. – Т. 73, вып. 1. – С. 39–53.
8. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979.
9. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М.: Наука, 1978.
10. Лаврентьев, М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. – М.: Наука, 1980.
11. Ладыженская, О.А. Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973.
12. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1973.
13. Тихонов, А.Н. Нелинейные некорректные задачи / А.Н. Тихонов, А.С. Леонов, А.Г. Ягола. – М.: Наука, 1995.

Александр Илларионович Короткий, доктор физико-математических наук, профессор, отдел прикладных задач, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН; кафедра «Вычислительная математика», Уральский федеральный университет (г. Екатеринбург, Российская Федерация), korotkii@imm.uran.ru.

Bulletin of the South Ural State University.
Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,
2013, vol. 6, no. 3, pp. 67–78.

MSC 35L20, 49N45

Reconstruction of Distributed Controls in Hyperbolic Systems by Dynamic Method

A.I. Korotkii, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch, Russian Academy of Sciences; Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation, korotkii@imm.uran.ru

In the paper an inverse dynamic problem is considered. It consists of reconstructing a priori unknown distributed controls in dynamical systems described by boundary value problems for partial differential equations of hyperbolic type. The source information for solving the inverse problem is the results of approximate measurements of the states (velocities) of the observed system's motion. The problem is solved in the dynamic case, i.e. to solve the problem we can use only the approximate measurements accumulated by this moment. Unknown controls must be reconstructed in dynamics (during the process, during the motion of the system). The problem under consideration is ill-posed. We propose the method of dynamic regularization to solve the problem. This method was elaborated by Yu.S. Osipov and his school. New modifications of dynamic regularizing solution algorithms are devised in this paper. Using these algorithms in contrast to tradition approach we can obtain stronger convergence of regularized approximations, in particular the piecewise uniform convergence. We also demonstrate a finite-dimensional approximation of the problem and the present results of numerical modelling. These results enable us to assess the ability of modified algorithms to reconstruct the subtle structure of desired controls.

Keywords: dynamical system, control, reconstruction, method of dynamic regularization, piecewise uniform convergence.

References

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-Theoretical Control Problems.* N.Y., Springer-Verlag, 1988.
2. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. Modeling of a Control in a Dynamic System. *Engineering Cybernetics,* 1983, vol. 21, no. 2, pp. 38–47.
3. Osipov Yu.S., Vasil'ev F.P., Potapov M.M. *Osnovy metoda dinamicheskoy regulyarizatsii* [Foundations of the Dynamical Regularization Method]. Moscow, Moscow Univ., 1999.
4. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. *Metody dinamicheskogo vosstanovleniya vkhodov upravlyaemykh sistem* [Methods of Dynamic Reconstruction of Inputs of Controlled Systems]. Yekaterinburg, UrB RAS Pub., 2011.
5. Korotkii A.I. Inverse Problems of the Dynamics of Controllable Systems with Distributed Parameters. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika),* 1995, vol. 39, no. 11, pp. 94–115.
6. Korotkii A.I. *Pryamye i obratnye zadachi upravlyaemykh sistem s raspredelennymi parametrami* [Direct and Inverse Problems of Controlled Systems with Distributed Parameters]. Doctoral Dissertation in Physics and Mathematics, Yekaterinburg, 1993.
7. Korotkii M.A. The Reconstruction of Controls by Regularization Methods with Uneven Stabilizers. *J. of Applied Mathematics and Mechanics,* 2009, vol. 73, issue 1, pp. 26–35.
8. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. *Solution of Ill-Posed Problems.* N.Y., Wiley, 1977.
9. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications.* Utrecht, VSP, 2002.
10. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis.* Providence, AMS, 1980.
11. Ladyzhenskaya O.A. *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics.* Berlin, Heidelberg, N.Y., Springer-Verlag, 1985.
12. Ladyzhenskaya O.A., Uraltseva N.N. *Linear and Quasilinear Elliptic Equations.* N.Y., London, Academic Press, 1968.
13. Tikhonov A.N., Leonov A.S., Yagola A.G. *Nonlinear Ill-Posed Problems. Vols 1 and 2.* London, Chapman and Hall, 1998.

Поступила в редакцию 18 марта 2013 г.