УДК 519.63 **DOI: 10.14529/mmp140106**

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СКВОЗНОГО СЧЕТА УДАРНЫХ ВОЛН

В.Ф. Куропатенко

Сильные разрывы – ударные волны возникают в сплошной среде при динамических внешних воздействиях. На поверхности сильных разрывов законы сохранения принимают вид нелинейных алгебраических уравнений, связывающих скачки величин по обе стороны разрыва. На сильном разрыве энтропия терпит скачок. В этом заключается принципиальное различие между ударными волнами и волнами с непрерывным изменением величин. В однородных разностных методах сильный разрыв заменяется слоем конечной ширины, сравнимой с размером сеточной ячейки. Такое свойство разностных схем получило название дистракции. Поскольку состояние за разрывом связано ударной адиабатой с состоянием перед разрывом, то в области дистракции сильного разрыва должен действовать механизм, обеспечивающий возрастание энтропии. Физическая вязкость и теплопроводность в уравнениях механики сплошной среды не устраняют необходимости введения поверхности сильного разрыва и, следовательно, не могут обеспечить величину дистракции, сравнимую, с несколькими ячейками разностной сетки. В работе рассмотрены несколько разностных схем, в которых диссипация энергии в слое дистракции определяется уравнениями, справедливыми на поверхности сильного разрыва.

Ключевые слова: ударная волна; разностный метод; дистракция; диссипация энергии; законы сохранения.

1. Идея метода

Ударная волна – поверхность сильного разрыва заменяется слоем конечной ширины, содержащим несколько ячеек сетки. Параметры вещества, находящегося в одной сеточной ячейке, за несколько шагов по времени изменяются от состояния перед сильным разрывом до состояния за сильным разрывом. Эти состояния в случае идеальной среды связаны законами сохранения массы, количества движения и энергии в виде системы нелинейных алгебраических уравнений

$$P_1 - P_0 - W(U_1 - U_0) = 0, \tag{1}$$

$$U_1 - U_0 + W(V_1 - V_0) = 0, \tag{2}$$

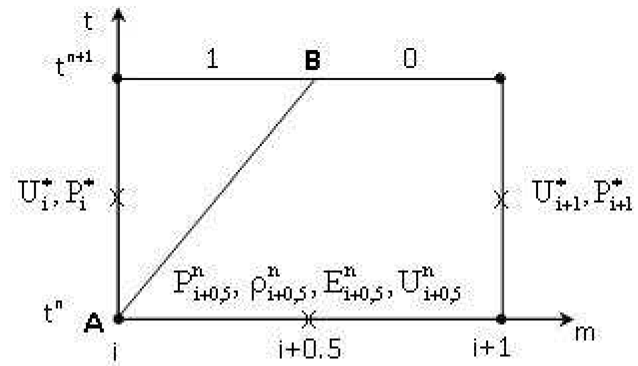
$$\left(E_1 + \frac{1}{2}U_1^2 - E_0 - \frac{1}{2}U_0^2\right) W - (P_1 U_1 - P_0 U_0) = 0, \tag{3}$$

где P – давление, V – удельный объем, U – скорость, E – удельная внутренняя энергия, $W = \dfrac{dm}{dt}$ – скорость сильного разрыва. Состояние вещества перед разрывом, отмеченное индексом «0», считается заданным, а состояние за разрывом с индексом «1» - текущим. К уравнениям (1)–(3) добавляется уравнение состояния

$$P_1 = P(V_1,\ E_1). \tag{4}$$

Система четырех уравнений (1)–(4) содержит пять величин. Таким образом, чтобы определить конкретное состояние за разрывом, нужно задать одну из текущих величин, т.е. выбрать ее в качестве параметра.

В разностных методах сквозного счета ударных волн сильный разрыв заменяется ударным слоем шириной в несколько ячеек сетки [1–6]. Происходит дистракция сильного разрыва [7]. Уравнения (1)–(3) связывают состояния вещества на границах этого слоя. Внутри же слоя действуют различные механизмы диссипации энергии [2–5]. Рассмотрим разностный метод счета ударных волн, в котором сильный разрыв заменяется пакетом следующих друг за другом ударных волн меньшей амплитуды. Таким образом внутри ударного слоя в каждый момент времени t^n в каждой ячейке сетки создается сеточная ударная волна, которая после перехода на следующий шаг по времени $t^{n+1} = t^n + \tau$ исчезает. Сеточная ударная волна в ячейке сетки с индексом $i + 0,5$ схематически изображена на рисунке.



Схематическое изображение «сеточной» ударной волны AB и состояний перед ней 0 и за ней 1

Чтобы не усложнять понимания идеи метода, рассмотрим разностную схему в простейшей постановке. Одномерное течение идеальной среды с плоской симметрией в лагранжевых координатах и без теплопроводности описывается системой законов сохранения

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial PU}{\partial m} = 0. \tag{5}$$

Умножим каждое из уравнений (5) на $dmdt$ и проинтегрируем по площади сеточной ячейки. Применив к полученным интегралам теорему о среднем значении, получим систему разностных уравнений

$$\frac{V_{i+0,5}^{n+1} - V_{i+0,5}^{n}}{\tau} - \frac{U_{i+1}^{*} - U_{i}^{*}}{h} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{U_{i+0,5}^{n+1} - U_{i+0,5}^{n}}{\tau} + \frac{P_{i+1}^{*} - P_{i}^{*}}{h} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\varepsilon_{i+0,5}^{n+1} - \varepsilon_{i+0,5}^{n}}{\tau} + \frac{(PU)_{i+1}^{*} - (PU)_{i}^{*}}{h} = 0, \tag{8}$$

где величины с индексами n, $n+1$ и нижним индексом $i + 0,5$ являются средними на промежутке $m_i \le m \le m_{i+1}$ в моменты времени t^n и t^{n+1}, величины с верхним индексом $*$ и нижними индексами i и $i+1$ являются средними на промежутке $t^n \le t \le t^{n+1}$ при значениях m_i и m_{i+1}. Иными словами $f_i = f(m_i)$, $f^* = f(t^*)$, $f^n = f(t^n)$. Масса сеточного интервала h связана с координатами его границ $h = \left(x_{i+1}^n - x_i^n\right)/V_{i+0,5}^n$. Величина h от времени не зависит и, таким образом, сохраняется при переходе от одного момента времени к другому. Удельная полная энергия ε есть сумма удельной внутренней и удельной кинетической энергии $\varepsilon = E + \dfrac{1}{2}\bar{U}^2$.

Вообще говоря, уравнения (6)–(8) являются точными до тех пор, пока не конкретизированы координаты точек, в которых определены величины, входящие в эти уравнения. Уравнения (6)–(8) являются также общими до тех пор, пока не указаны уравнения для определения вспомогательных величин U_i^*, P_i^*, $(PU)_i^*$. Эти величины называются вспомогательными величинами, т.к. после завершения перехода к решению в момент t^{n+1} они забываются. Поскольку при нахождении решения в момент t^{n+1} используются законы сохранения на сильном разрыве в виде (1)–(3), то тем самым на каждом временном шаге диссипация энергии в отличие от [2–4] определяется единственным физически обоснованным механизмом – законами сохранения на поверхности сильного разрыва.

Для пояснения идеи рассмотрим процедуру перехода с момента t^n, где все сеточные функции известны, к моменту t^{n+1} в одной сеточной ячейке, изображенной на рисунке. Величина W может быть и положительной и отрицательной. Не умаляя общности, будем рассматривать случай $W > 0$.

Термодинамические величины $P_{i+0,5}^{\,n}$, $\rho_{i+0,5}^{\,n}$, $E_{i+0,5}^{\,n}$, $C_{i+0,5}^{\,n}$ характеризуют состояние вещества в момент t^n в ячейке с номером $i+0,5$. Поскольку они являются результатом применения теоремы о среднем значении, то будем считать их постоянными на промежутке $m_i < m < m_{i+1}$. Это предположение означает, что на границах сеточных интервалов возникли разрывы. Будем рассматривать эти разрывы как сеточные ударные волны. Состояние с одной стороны разрыва – это состояние перед разрывом, а одна из величин в соседнем интервале – это величина за разрывом. Условие, что разрыв является сеточной ударной волной, имеет вид

$$\frac{U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n}{m_{i+0,5} - m_{i-0,5}} < 0.$$

Сравнение давлений $P_{i+0,5}^n$ и $P_{i-0,5}^n$ позволяет определить знак W_i. Если $P_{i-0,5}^n > P_{i+0,5}^n$, то $W_i > 0$ и ударная волна будет при $t > t^n$ распространяться в интервале с номером $i + 0,5$ (как показано на рисунке). В качестве величин перед разрывом берутся сеточные значения в момент t^n

$$U_0 = U_{i+0,5}^n, \quad P_0 = P_{i+0,5}^n, \ \rho_0 = \rho_{i+0,5}^n, \quad E_0 = E_{i+0,5}^n, \ V_0 = 1/\rho_0,$$

а в качестве величин за разрывом берутся либо скорость $U_{i-0,5}^n$, либо давление $P_{i-0,5}^n$.

Далее решается система уравнений (1)–(4), в результате чего определяются величины U_1, P_1, V_1, E_1 и W и, соответственно, вспомогательные значения U_i^* и P_i^*

$$\begin{aligned} &U_i^* = U_{i-0,5}^n, \quad P_i^* = P_{i+0,5}^n + W_i\left(U_{i-0,5}^n - U_{i+0,5}^n\right), && \text{если задано } U_1, \\ &P_i^* = P_{i-0,5}^n, \quad U_i^* = U_{i+0,5}^n + \frac{\left(P_{i-0,5}^n - P_{i+0,5}^n\right)}{W_i}, && \text{если задано } P_1. \end{aligned} \tag{9}$$

Аналогично определяются вспомогательные значения U_{i+1}^*, P_{i+1}^*

$$\begin{aligned} &U_{i+1}^* = U_{i+0,5}^n, \quad P_{i+1}^* = P_{i+1,5}^n + W_{i+1}\left(U_{i+0,5}^n - U_{i+1,5}^n\right), && \text{если задано } U_1 \text{ и } W_{i+1} > 0, \\ &P_{i+1}^* = P_{i+0,5}^n, \quad U_{i+1}^* = U_{i+1,5}^n + \frac{\left(P_{i+0,5}^n - P_{i+1,5}^n\right)}{W_{i+1}}, && \text{если задано } P_1 \text{ и } W_{i+1} > 0. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что уравнения (6)–(8) со вспомогательными значениями U_i^*, P_i^* строго соответствуют мгновенным законам сохранения. Поскольку ячейка сетки состоит из двух частей, разделенных траекторией сеточного сильного разрыва – линией AB, то в момент t^{n+1} масса вещества, находящегося за разрывом, равна $W\tau$, масса вещества перед разрывом $h - W\tau$. Термодинамические величины, средние в массе h в момент t^{n+1} находятся с помощью мгновенных законов сохранения массы, количества движения и энергии. В рассматриваемом случае усреднение идет по двум массам с массовыми концентрациями $\dfrac{\tau W}{h}$ для величин за разрывом и $1-\dfrac{\tau W}{h}$ – для величин перед разрывом.

Рассмотрим получение удельного объема $V_{i+0,5}^{n+1}$. Первый из мгновенных законов сохранения имеет вид

$$V_{i+0,5}^{n+1}=\frac{\tau W}{h}V_1^{n+1}+\left(1-\frac{\tau W}{h}\right)V_0^{n+1}. \tag{10}$$

Значение V_1^{n+1} это постоянное в интервале $W\tau$ значение удельного объема за фронтом сеточной ударной волны. Величины V_0, U_0, U_1, входящие в уравнение (2) совпадают с сеточными величинами $V_0=V_{i+0,5}^n$, $U_1=U_i^*$, $U_0=U_{i+0,5}^n$

$$V_1^{n+1}=V_{i+0,5}^n-\frac{1}{W}\left(U_i^*-U_{i+0,5}^n\right).$$

Значение V_0^{n+1} определяются из разностного уравнения

$$V_0^{n+1}=V_{i+0,5}^n+\frac{\tau}{h-W\tau}\left(U_{i+1}^*-U_{i+0,5}^n\right).$$

Подставив V_1^{n+1} и V_0^{n+1} в уравнение (10), получим разностное уравнение (6).

Рассмотрим теперь мгновенный закон сохранения количества движения

$$U_{i+0,5}^{n+1}=\frac{\tau W}{h}U_1^{n+1}+(1-\frac{\tau W}{h})U_0^{n+1}. \tag{11}$$

Значение U_1^{n+1} – это постоянное в интервале τW значение скорости за фронтом сеточной ударной волны. Оно связано со значением $U_0^n=U_{i+0,5}^n$ уравнением на разрыве (1) в виде

$$U_1^{n+1}=U_{i+0,5}^n+\frac{1}{W}\left(P_1-P_{i+0,5}^n\right). \tag{12}$$

Поскольку вспомогательное давление P_i^* в силу (9) совпадает с давлением за фронтом сеточной ударной волны $P_1=P_i^*$, то уравнение (12) принимает вид

$$U_1^{n+1}=U_{i+0,5}^n+\frac{1}{W}\left(P_i^*-P_{i+0,5}^n\right).$$

В интервале перед сеточным разрывом $P_{i+1}^*\neq P_{i+0,5}^n$. Поэтому за промежуток времени τ скорость вещества в интервале $h-W\tau$ изменится в соответствии с разностным уравнением

$$U_0^{n+1}=U_{i+0,5}^n-\frac{\tau}{h-W\tau}\left(P_{i+1}^*-P_{i+0,5}^n\right).$$

Подставив U_1^{n+1} и U_0^{n+1} в уравнение (11), получим разностное уравнение (7).

Наконец проделаем аналогичную процедуру с мгновенным законом сохранения энергии

$$\varepsilon_{i+0,5}^{n+1}=\frac{\tau W}{h}\varepsilon_1^{n+1}+\left(1-\frac{\tau W}{h}\right)\varepsilon_0^{n+1}. \tag{13}$$

Значение удельной полной энергии ε_1^{n+1} является средним в интервале за фронтом сеточной ударной волны, значение ε_0^{n+1} – среднее в интервале перед фронтом сеточной ударной волны.

Значения ε_1^{n+1} и ε_0^{n+1} выражаются через основные и вспомогательные значения сеточных функций с помощью уравнений (3) и (8) в виде

$$\varepsilon_1^{n+1} = \varepsilon_{i+0,5}^n + \frac{1}{W}\left(P_i^* U_i^* - P_{i+0,5}^n U_{i+0,5}^n\right), \tag{14}$$

$$\varepsilon_0^{n+1} = \varepsilon_{i+0,5}^n - \frac{\tau}{h - W\tau}\left(P_{i+1}^* U_{i+1}^* - P_{i+0,5}^n U_{i+0,5}^n\right). \tag{15}$$

Подставим (14) и (15) в (13). В результате получим разностное уравнение (8).

Подчеркнем, что при получении разностных уравнений (6)–(8) было сделано несколько предположений:

– В слое «размазанной» ударной волны все функции кусочно постоянны.

– Разрывы на границах сеточных интервалов являются сильными разрывами (сеточными ударными волнами).

– Функции перед сеточным разрывом постоянны. Они выбираются в момент t^n в рассматриваемом интервале.

– Функции U или P за сеточным разрывом постоянны. Одна из них выбирается в момент t^n в соседнем интервале, а вторая рассчитывается из уравнений (1)–(3).

– Решение в момент t^{n+1} получается путем применения мгновенных законов сохранения.

2. Дивергентная разностная схема

Рассмотрим с небольшими изменениями разностную схему из [9]. Все термодинамические величины и скорости определены в серединах сеточных интервалов, узлы сетки имеют координаты t^n, m_i. Разностные уравнения имеют вид (6)–(8). Вспомогательные величины P_i^*, U_i^* определяются с помощью двух различных алгоритмов в зависимости от того, разрежение или сжатие происходит на вспомогательном промежутке $m_{i-0,5} \le m \le m_{i+0,5}$.

Если внутри вспомогательной ячейки $U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n \ge 0$, то решение в указанном сеточном интервале является непрерывным, и P_i^*, U_i^* определяются разностными уравнениями в виде

$$U_i^* = U_i^n - \frac{\tau}{2h}\left(P_{i+0,5}^n - P_{i-0,5}^n\right), \quad P_i^* = P_i^n - \frac{\tau a^2}{2h}\left(U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n\right).$$

Значения U_i^n и P_i^n находятся интерполяциями по $U_{i+0,5}^n$, $U_{i-0,5}^n$ и $P_{i+0,5}^n$, $P_{i-0,5}^n$.

Вспомогательные величины P_i^*, U_i^* используются только в уравнениях (6) и (7) для нахождения $V_{i+0,5}^{n+1}$, $U_{i+0,5}^{n+1}$. Вместо уравнения энергии (8) на волне разрежения используется следствие из законов сохранения в виде

$$E^{n+1} - E^n + \int\limits_{V^n}^{V^{n+1}} P(V,E)\, dV = 0. \tag{16}$$

Интегрирование вдоль изэнтропы успешно применялось в [10–14] для определения параметров вещества на волнах разрежения. Этот метод обеспечивает любую наперед заданную точность определения энтропии и устраняет ложную диссипацию энергии. Уравнение (16) может быть решено разными способами. Один из возможных способов интегрирования вдоль изэнтропы основан на использовании структуры УРС вещества [15]

$$P = P_x(V) + P_{\text{т}}(V, E_{\text{т}}), \quad E = E_x(V) + E_{\text{т}}.$$

Поскольку зависимости $P_x(V)$ и $E_x(V)$ заданы, то с их помощью находятся значения $P_x^{n+1}\left(V^{n+1}\right)$ и $E_x^{n+1}\left(V^{n+1}\right)$. В качестве зависимости между тепловым давлением $P_{\text{т}}$, тепловой энергией $E_{\text{т}}$ и удельным объемом V возьмем уравнение, являющееся определением $P_{\text{т}}$

$$P_{\text{т}} = -\left(\frac{\partial E_T}{\partial V}\right)_s.$$

Согласно [15] зависимость $P_{\text{т}}$ от V и $E_{\text{т}}$ чаще всего представляется в виде

$$P_{\text{т}} = \Gamma(V)\, E_{\text{т}}/V,$$

где

$$\Gamma(V) = -\frac{d\ln\theta}{d\ln V},$$

а функция $\theta(V)$ есть аналог характеристической температуры Дебая [15]. Из этих трех уравнений после интегрирования вдоль изэнтропы получается уравнение

$$E_{\text{т}}^{n+1} = E_{\text{т}}^{n}\theta^{n+1}\left(V^{n+1}\right)/\theta^{n}\left(V^{n}\right),$$

позволяющее определить $E_{\text{т}}(V^{n+1})$. Особо следует отметить, что эти уравнения справедливы только при изменении V вдоль изэнтропы S=const. Такой расчет внутренней энергии и давления обеспечивает любую необходимую точность определения энтропии, а уравнение производства энтропии принимает вид

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_m = 0.$$

Рассмотрим дивергентную разностную схему на волне сжатия. Вспомогательные величины вычисляются из уравнений на поверхности сильного разрыва (1)–(3) и уравнения состояния (4). Величины по обе стороны разрыва задаются следующим образом.

Если $U_{i+0,5}^n - U_{i-0,5}^n < 0$, то

1. $U_1 = U_{i-0,5}^n$, $(P,V,E,U)_0 = (P,V,E,U)_{i+0,5}^n$, $W > 0$ при $P_{i-0,5}^n > P_{i+0,5}^n$,
2. $U_1 = U_{i+0,5}^n$, $(P,V,E,U)_0 = (P,V,E,U)_{i-0,5}^n$, $W < 0$ при $P_{i-0,5}^n < P_{i+0,5}^n$.

Остальные величины с индексом «1» находятся из (1)–(4). Если ограничиться рассмотрением только случая $W > 0$, то P_i^*, U_i^* определятся уравнениями (9).

Для исследования диссипации энергии на сеточной ударной волне запишем в соответствии с [10–13] разностные законы сохранения (6)–(8) вместе со вспомогательными величинами (9) в дифференциальной форме

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial M} = \omega_1, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial M} = \omega_2, \ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial PU}{\partial M} = \omega_3.$$

Погрешности аппроксимации ω_1, ω_2, ω_3 имеют вид

$$\omega_1 = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{h}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial m^2} + O^2, \quad \omega_2 = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + hW\frac{\partial^2 U}{\partial m^2} - \frac{h}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial m^2} + O^2,$$

$$\omega_3 = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial m}\left(U\frac{\partial P}{\partial m}\right) + \frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial m}\left(P\frac{\partial U}{\partial m}\right) + hW\frac{\partial}{\partial m}\left(U\frac{\partial U}{\partial m}\right) + O^2.$$

Согласно [10, 12], уравнение производства энтропии этой разностной схемы таково

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = \omega_3 + P\omega_1 - U\omega_2.$$

Подставив сюда выражения для ω_1, ω_2, ω_3, получим уравнение производства энтропии на сеточной ударной волне

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = hW\left(\frac{\partial U}{\partial m}\right)^2 - \frac{\tau a^2}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial m}\right)^2 - \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial m}\right)^2 + O^2.$$

Для дальнейшего упрощения этого уравнения воспользуемся уравнениями (9) для вспомогательных величин. Представим все входящие в них величины в виде рядов Тейлора в точке t^n, $m_{i+0,5}$. В результате получим связь производных $\frac{\partial P}{\partial m}$ и $\frac{\partial U}{\partial m}$, которая на слабой ударной волне при $W \approx a$ имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial m} = a\frac{\partial U}{\partial m} + O^2.$$

Подставив эту связь в уравнение производства энтропии на сеточной ударной волне, получим уравнение

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = ha\left(1-K\right)\left(\frac{\partial U}{\partial m}\right)^2 + O^2.$$

Рассмотрим монотонность этой разностной схемы на акустической ($W = a$) волне сжатия. Основные уравнения вместе со вспомогательными значениями (9) примут вид

$$P^{n+1}_{i+0,5} = P^n_{i+0,5} - \frac{\tau a^2}{h}\left(U^n_{i+0,5} - U^n_{i-0,5}\right),$$

$$U^{n+1}_{i+0,5} = U^n_{i+0,5} - \frac{\tau}{h}\left(P^n_{i+1,5} - P^n_{i+0,5} - a\left(U^n_{i+1,5} - 2U^n_{i+0,5} + U^n_{i-0,5}\right)\right).$$

Заменим P и U их выражениями через инварианты α и β

$$\alpha^{n+1}_{i+0,5} + \beta^{n+1}_{i+0,5} = \alpha^n_{i+0,5}\left(1-K\right) + \beta^n_{i+0,5}\left(1+K\right) + K\left(\alpha^n_{i-0,5} - \beta^n_{i-0,5}\right),$$

$$\alpha^{n+1}_{i+0,5} - \beta^{n+1}_{i+0,5} = \alpha^n_{i+0,5}\left(1-K\right) - \beta^n_{i+0,5}\left(1-3K\right) - 2K\beta^n_{i+1,5} + K\left(\alpha^n_{i-0,5} - \beta^n_{i-0,5}\right).$$

Сложив эти два уравнения, получим

$$\alpha^{n+1}_{i+0,5} = \alpha^n_{i+0,5}\left(1-K\right) + K\alpha^n_{i-0,5} - K\beta^n_{i+1,5} + 2K\beta^n_{i+0,5} - \mathrm{K}\beta^n_{i-0,5}. \tag{17}$$

В случае β^n=const уравнение (17) принимает вид

$$\alpha^{n+1}_{i+0,5} = \alpha^n_{i+0,5}\left(1-K\right) + \alpha^n_{i-0,5}K.$$

Оба коэффициента положительны при $0 \le K \le 1$ и, таким образом, дивергентная разностная схема Куропатенко на волне сжатия монотонна.

Далее, аналогично [7, 9], исследуем дистракцию ударной волны. Перейдем к автомодельной переменной $\xi = m - Wt$. Тогда уравнения (6)–(8) вместе со вспомогательными значениями U^*_i, P^*_i, определяемыми уравнениями (9) и погрешностями аппроксимации ω_1, ω_2 и ω_3, примут вид

$$WV' + U' - \frac{\tau W^2}{2}V'' - \frac{h}{2}U'' + O^2 = 0, \tag{18}$$

$$WU' - P' - \frac{\tau W^2}{2}U'' - \frac{h}{2}P'' + hWU'' + O^2 = 0, \tag{19}$$

$$W\varepsilon' - (PU)' - \frac{\tau W}{2}PU'' - \frac{h}{2}\left(UP'\right)' + \frac{h}{2}\left(PU'\right)' - hW\left(UU'\right)' + O^2 = 0. \tag{20}$$

Проинтегрировав эти уравнения по ξ, получим

$$WV + U - \frac{\tau W^2}{2} V' - \frac{h}{2} U' = WV_0 + U_0 + O^2, \tag{21}$$

$$WU - P - \frac{\tau W^2}{2} U' - \frac{h}{2} \mathrm{P}' + hWU' = WV_0 - \mathrm{P}_0 + O^2, \tag{22}$$

$$W\varepsilon - PU - \frac{\tau W}{2} (\mathrm{P}U)' - \frac{h}{2} U\mathrm{P}' + \frac{h}{2} \mathrm{P}U' - hWUU' = W\varepsilon_0 - \mathrm{P}_0 U_0 + O^2. \tag{23}$$

С помощью (18)–(20) заменим в (21)–(23) U' и P' на V'. Затем с помощью (21)–(23) заменим U и P на V. В результате для идеального газа получим уравнение, описывающее профиль $V(\xi)$.

$$\frac{2h(1-K)}{(\gamma+1)} \cdot \frac{dV}{d\xi} + \frac{(V - V_0)(V - V_1)}{V} + O\left(\tau^2, h^2\right) = 0. \tag{24}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\xi = \frac{2h(1-K)}{(\gamma+1)(V_0 - V_1)} \left(V_1 \ln(V - V_1) - V_0 \ln(V_0 - V)\right). \tag{25}$$

Из (25) следует, что

$$\xi = \xi_0 = +\infty \text{ при } V = V_0, \;\; \xi = \xi_1 = -\infty \text{ при } V = V_1.$$

Таким образом, дистракция разрыва в дивергентной разностной схеме метода Куропатенко при $K < 1$ бесконечна, а при $K \to 1$ дистракция $D_{K1} \to 0$.

Для определения эффективной дистракции $D^{\text{Э}}_{K1}$ находятся точки пересечения прямой линии $V(\xi)$, имеющей максимальный наклон V'_M, со значениями V_0 и V_1. Эффективная ширина ударного слоя определяется уравнением

$$\Delta\xi = \frac{V_0 - V_1}{V'_M}. \tag{26}$$

Для определения V'_M продифференцируем (24) и в полученном уравнении положим нулю V''. В результате получим значение $V = V_M$, при котором $V'' = 0$, и выражение производной V' при $V = V_M$

$$V_M = \sqrt{V_0 V_1},\, V'_M = \frac{\gamma+1}{2h(1-K)}(\sqrt{V_0} - \sqrt{V_1}).$$

Подставив V'_M в (26), получим после деления на h выражение для эффективной дистракции в дивергентной разностной схеме Куропатенко

$$D^{\text{Э}}_{K1} = \frac{2}{(\gamma+1)} (1-K) \left(\frac{\sqrt{V_0} + \sqrt{V_1}}{\sqrt{V_0} - \sqrt{V_1}}\right). \tag{27}$$

Рассмотренная дивергентная разностная схема устойчива при соотношении шагов

$$\frac{\tau a^2}{h} \leq 1, \quad \text{где } \; a^2 = -\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_s.$$

3. Недивергентная разностная схема

Сетки для скорости и для термодинамических величин различаются. Значения P, V, E определяются в серединах сеточных интервалов по массе, значения скорости – в узлах сетки t^n, m_i.

В случае волны разрежения при $U^n_{i+1} - U^n_i \geq 0$ разностные уравнения имеют вид

$$x^{n+1}_i = x^n_i + \tau U^n_i, \tag{28}$$

$$V^{n+1}_{i+0,5} = \frac{x^{n+1}_{i+1} - x^{n+1}_i}{h}. \tag{29}$$

Удельная внутренняя энергии $E^{n+1}_{i+0,5}$ и давление $P^{n+1}_{i+0,5}$ находятся из уравнения (16) вместе с уравнением состояния (4), один из способов решения которого изложен в §2. После определения $P^{n+1}_{i+0,5}$ и значения $P^{n+1}_{i-0,5}$ в соседнем интервале определяется скорость U^{n+1}_i

$$\frac{U^{n+1}_i - U^n_i}{\tau} + \frac{P^{n+1}_{i+0,5} - P^{n+1}_{i-0,5}}{h} = 0. \tag{30}$$

Разностные уравнения (28)–(30) в дифференциальной форме имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial m} = \omega_2,\ \frac{\partial x}{\partial t} - U = \omega_4,\ \frac{\partial x}{\partial m} - V = \omega_5.$$

Таким образом, независимыми погрешностями аппроксимации являются ω_2, ω_4, ω_5

$$\omega_2 = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} - \frac{h^2}{24}\frac{\partial^3 U}{\partial m^3} + O^3,\ \omega_4 = \frac{\tau}{2}\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + O^3,\ \omega_5 = -\frac{h^2}{24}\frac{\partial^3 x}{\partial m^3} + O^3.$$

Для волн сжатия выполняется условие $U^n_{i+1} - U^n_i < 0$. В этом случае в соответствии с основной идеей метода считается, что в сеточном интервале находится сеточная ударная волна. Ее местоположение, знак скорости W и значения U_1 и U_0 определяются профилем $P(m)$ в соответствии с условиями,

если $P^{n+1}_{i+1,5} > P^{n+1}_{i-0,5}$, то $W < 0$, $m_p = m_{i+1}$, $\quad U_0 = U^n_i$, $\quad U_1 = U^n_{i+1}$,

если $P^{n+1}_{i+1,5} < P^{n+1}_{i-0,5}$, то $W > 0$, $m_p = m_i$, $U_0 = U^n_{i+1}$, $U_1 = U^n_i$.

В качестве величин перед сильным разрывом берутся величины в сеточном интервале в момент t^n

$$P_0 = P^n_{i+0,5},\ V_0 = V^n_{i+0,5},\ E_0 = E^n_{i+0,5}.$$

Поскольку скорости определены на концах интервала, для определения полной энергии $\varepsilon_{i+0,5}$ нужно доопределить скорость в середине интервала. Из предположения, что фон перед сеточной ударной волной постоянный, следует

$$U^n_{i+0,5} = \begin{cases} U^n_{i+1}, \text{ если } W > 0, \\ U^n_i, \text{ если } W < 0. \end{cases}$$

На следующем этапе определяются значения за сеточной ударной волной. Решая систему уравнений (1)–(4) с заданным значением U_1, получим P_1, V_1, E_1, W.

Для определения $V^{n+1}_{i+0,5}$ применим мгновенный закон сохранения массы (10). Величина τW это тот промежуток по m, который сеточная ударная волна прошла со скоростью W за время $\tau = t^{n+1} - t^n$. Сеточная ударная волна распространяется с постоянной скоростью W и постоянными величинами перед и за разрывом. Из этого следует, что V_1 не изменяется со временем и, таким образом, $U_1^{n+1} = U_1$. Поскольку скорость перед разрывом постоянная, то и среднее на промежутке $h - \tau W$ значение V_0^{n+1} должно быть равно $V_0 = V_{i+0,5}^n$. Из уравнения (2) выразим V, и в полученном уравнении заменим V_0, U_0 и U_1 значениями $V_{i+0,5}^n$, U_{i+1}^n и U_i^n. В результате получим

$$V_{i+0,5}^{n+1} = V_{i+0,5}^n + \frac{\tau}{h}\left(U_{i+1}^n - U_i^n\right). \tag{31}$$

Это уравнение совпадает с уравнением (6), если в качестве вспомогательных значений U_{i+1}^*, U_i^* взять скорости концов интервала $i + 0,5$

$$U_{i+1}^* = U_{i+1}^n,\; U_i^* = U_i^n.$$

Такое определение вспомогательных значений не противоречит требованию инвариантности вспомогательных величин к изменению индекса i.

При переходе с одного временного шага t^n на следующий шаг t^{n+1} величина $h = m_{i+1} - m_i$ сохраняется

$$h = \frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{V_{i+0,5}^n} = \frac{x_{i+1}^{n+1} - x_i^{n+1}}{V_{i+0,5}^{n+1}}. \tag{32}$$

Подставив $V_{i+0,5}^{n+1}$ из (31) в уравнение (32), получим

$$x_{i+1}^{n+1} - x_i^{n+1} = x_{i+1}^n - x_i^n + \tau\left(U_{i+1}^n - U_i^n\right).$$

Траектории частиц не зависят от индекса i. Следовательно

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \tau U_i^n.$$

Рассмотрим теперь мгновенный закон сохранения количества движения (11). Значения U_1^{n+1} и U_0^{n+1} это средние значения скорости в промежутках τW и $h-\tau W$. За ударной волной все величины постоянны и $U_1^{n+1} = U_1$. Для среднего значения U_0^{n+1} напишем разностное уравнение

$$U_0^{n+1} = U_{i+0,5}^{n+1} - \frac{\tau}{h - \tau W}\left(P_{i+1}^* - P_{i+0,5}^n\right). \tag{33}$$

Будем считать, что в интервале $i + 1,5$ тоже распространяется сеточная ударная волна с $W_{i+1,5} > 0$. Тогда

$$P_{i+1}^* = (P_1)_{i+1,5} = P_{i+1,5}^n - W_{i+1,5}\left(U_{i+2}^n - U_{i+1}^n\right).$$

Очевидно, что

$$P_{i+1}^* \neq P_{i+0,5}^n$$

и таким образом среднее значение $U_0^{n+1} \neq U_{i+0,5}^n$. Выразим U_1 из (1) и подставим его вместе с U_0^{n+1} из (33) в (11). В результате получим разностное уравнение (7).

Мгновенный закон сохранения энергии имеет вид (13). Величину ε_1^{n+1} выразим из (3). С учетом введенных выше обозначений получим

$$\varepsilon_1^{n+1} = \varepsilon_{i+0,5}^n + \frac{1}{W}\left(P_i^* U_i^* - P_{i+0,5}^n U_{i+1}^n\right). \tag{34}$$

Величина ε_0^{n+1} определяется из разностного уравнения

$$\varepsilon_0^{n+1} = \varepsilon_{i+0,5}^n - \frac{\tau}{h - \tau W}\left(P_{i+1}^* U_{i+1}^* - P_{i+0,5}^n U_{i+1}^n\right). \tag{35}$$

Подставив (34), (35) в (13) и проведя простые преобразования, получим уравнение (8).

Переход от мгновенных законов сохранения (10), (11), (13) к разностным уравнениям (6)–(8) возможен при вполне конкретном выборе вспомогательных значений P_i^*, U_i^*.

Из всех искомых величин остались неопределенными скорости U_1^{n+1} и U_{i+1}^n. В рассмотренном нами случае, когда $W > 0$, в момент t^n скорость в интервале $i + 0,5$ считалась постоянной и равной U_{i+1}^n, т.е. $U_{i+0,5} = U_{i+1}^n$. Завершить расчет величин в момент $t^n + 1$ следует так, чтобы такая же ситуация была бы и в момент t^{n+1}, т.е.

$$U_{i+1}^{n+1} = U_{i+0,5}^{n+1}.$$

Величина удельной внутренней энергии определяется уравнением

$$E_{i+0,5}^{n+1} = \varepsilon_{i+0,5}^{n+1} - \frac{1}{2}\left(U_{i+0,5}^{n+1}\right)^2.$$

Недивергентная разностная схема устойчива при соотношении шагов $\dfrac{\tau a}{h} < 1$. Дистракция разрывов определяется уравнением (27).

Разностные уравнения обладают двумя важными свойствами:

1. При $\tau = 0$ профили величин, заданных в момент t^n, не изменяются.

2. При соотношении шагов $\dfrac{\tau W}{h} = 1$ ударная волна не размывается и при постоянном фоне стационарная ударная волна «прыгает» из точки в точку. Действительно, при $\dfrac{\tau W}{h} = 1$ из уравнений (10), (11), (13) следует, что

$$V_{i+0,5}^{n+1} = V_1, \quad U_{i+0,5}^{n+1} = U_1,\ \varepsilon_{i+0,5}^{n+1} = \varepsilon_1,\ U_{i+1}^{n+1} = U_1.$$

Заключение

Метод определения вспомогательных величин P_i^*, U_i^*, основанный на использовании законов сохранения на сильном разрыве для расчета параметров сеточных ударных волн и на применении мгновенных законов сохранения, позволяет строить и дивергентные, и недивергентные разностные схемы. В [16, 17] описан богатый опыт их применения для моделирования ударных волн и волн разрежения.

Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ. Грант 13-01-00072.

Литература

1. Куропатенко, В.Ф. О разностных методах для уравнений гидродинамики / В.Ф. Куропатенко // Труды матем. инст. им. В.А.Стеклова. – 1966. – Т. 74, вып. 1. – С. 107–137.

2. Neumann, J. A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamical Shocks / J. Neumann, R. Richtmayer // J. Appl. Phys. – 1950. – V. 21, № 3. – P. 232–237.

3. Lax, P.D. Weak Solution of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computations / P.D. Lax // Comn. Pure and Appl. Math. – 1954. – V. 7. – P. 159–193.

4. Годунов, С.К. Разностный метод расчета ударных волн / С.К. Годунов // Успехи математических наук. – 1957. – № 12, вып. 1. – С. 176–177.

5. Куропатенко, В.Ф. Метод расчета ударных волн / В.Ф. Куропатенко // ДАН СССР. – 1960. – Т. 3, № 4. – С. 771–772.

6. Рождественский, Б.Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко. – М.: Наука, 1968.

7. Куропатенко, В.Ф. Исследование дистракции разрывов в методах расчета ударных волн / В.Ф. Куропатенко, И.Р. Макеева // Математическое моделирование. – 2006. – Т. 18, № 3. – С. 120–128.

8. Ступоченко, Е.В. Релаксационные процессы в ударных волнах / Е.В. Ступоченко, С.А. Лосев, А.И. Осипов. – М.: Наука, 1965.

9. Куропатенко, В.Ф. Разностный метод расчета ударных волн с повышенными свойствами монотонности / В.Ф. Куропатенко, И.Р. Макеева // Препринт ВНИИТФ. – 1997. – № 120.

10. Куропатенко, В.Ф. Локальная консервативность разностных схем для уравнений газовой динамики / В.Ф. Куропатенко // Журнал выч. матем. и матем. физики. – 1985. – Т. 25, № 8. – С. 1176–1188.

11. Куропатенко, В.Ф. О полной консервативности разностных законов сохранения / В.Ф. Куропатенко // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Численные методы решения задач математической физики. – 1982. – Вып. 3(11). – С. 3–5.

12. Куропатенко, В.Ф. О точности вычисления энтропии в разностных схемах для уравнений газовой динамики / В.Ф. Куропатенко // Численные методы механики сплошной среды: сб. – 1978. – Т. 9, № 7. – С. 49–59.

13. Куропатенко, В.Ф. Связь дивергентности с консервативностью разностных схем для уравнений газовой динамики / В.Ф. Куропатенко // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физ. процессов. – 1990. – Вып. 2. – С. 63–69.

14. Куропатенко, В.Ф. Методы расчета ударных волн / В.Ф. Куропатенко // Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Серия Б. Математическое моделирование в низкотемпературной плазме. Часть 2. – 2008. – Т. VII-I. – С. 496–506.

15. Куропатенко, В.Ф. Модели механики сплошной среды / В.Ф. Куропатенко. – Челябинск: ЧелГУ, 2007.

16. Куропатенко, В.Ф. О влиянии свойств разностных схем на математическое моделирование динамических процессов / В.Ф. Куропатенко, И.А. Доровских, И.Р. Макеева // Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11, часть 2. – С. 9–11.

17. Комплекс программ ВОЛНА и неоднородный разностный метод для расчета неустановившихся движений сжимаемых сплошных сред / В.Ф. Куропатенко, Г.В. Коваленко, В.И. Кузнецова, Г.И. Михайлова // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физ. процессов. – 1989. – Вып. 2. – С. 9–25.

Валентин Федорович Куропатенко, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики им. академика Е.И. Забабахина (г. Снежинск, Челябинская обл., Российская Федерация), v.f.kuropatenko@rambler.ru.

Bulletin of the South Ural State University.
Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software",
2014, vol. 7, no. 1, pp. 62–75.

MSC 76.L, 74.S **DOI: 10.14529/mmp140106**

A Shock Capturing Method

V.F. Kuropatenko, Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin Institute of Applied Physics, Snezhinsk, Russian Federation, v.f.kuropatenko@rambler.ru

Strong discontinuities, or shocks in continua are a result of external dynamic loads. On the shock surface the conservation laws take the form of nonlinear algebraic equations for jumps across the shock. Entropy jumps across a strong discontinuity, and just this jump differs shocks from waves where the quantities vary continuously. In the heterogeneous difference schemes, the shock is treated as a layer of a finite thickness comparable with the cell size. This property of finite-difference schemes was called distraction. Since the state behind a shock is related to the state before it by the Hugoniot, in the distraction region there must act a mechanism that increases entropy. The physical viscosity and heat conductivity in continuum mechanics equations do not make it unnecessary to introduce a shock surface and hence cannot make the distraction length comparable with a few cells of the difference mesh. The paper considers a number of finite difference schemes where energy dissipation in the distraction region is defined by equations which are valid on the shock surface.

Keywords: shock wave; differential method; distraction; energy dissipation; conservation laws.

References

1. Kuropatenko V.F. Finite Difference Methods for Hydrodynamics Equations [O raznostnykh metodakh dlya uravneniy gidrodinamiki]. *Trudy matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 1966, vol. 74, part 1, pp. 107–137.
2. Neumann J., Richtmayer R. A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks. *J. Appl. Phys.,* 1950, vol. 21, no. 3, pp. 232–237. DOI: 10.1063/1.1699639
3. Lax P.D. Weak Solution of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computations. *Comn. Pure and Appl. Math.,* 1954, vol. 7, pp. 159–193. DOI: 10.1002/cpa.3160070112
4. Godunov S.K. A Finite-Difference Method for Shock Calculation [Raznostnyy metod rascheta udarnykh voln]. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* [Russian Mathematical Surveys], 1957, no. 12, issue 1, pp. 176–177.
5. Kuropatenko V.F. A Shock Calculation Method. *DAN SSSR*, 1960, vol. 3, no. 4, pp. 771–772.
6. Rohzdestvensky B.l, Yanenko N.N. *Sistemy kvazilineynykh uravneniy i ikh prilozheniya k gazovoy dinamike* [Systems of Quasi-Linear Equations and Their Applications to Hydrodynamics]. Moscow, Nauka, 1968. 592 p.
7. Kuropatenko V.F., Makeyeva I.R. Discontinuity Distraction in Shock Calculation Methods [Issledovanie distraktsii razryvov v metodakh rascheta udarnykh voln]. Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical Models and Computer Simulations], 2006, vol. 18, no. 3, pp. 120–128.

8. Stupochenko E.V., Losev S.A., Osipov A.I. *Relaksatsionnye protsessy v udarnykh volnakh* [Relaxation Processes in Shock Waves]. Moscow, Nauka, 1965. 484 p.
9. Kuropatenko V.F, Makeyeva I.R. *Raznostnyy metod rascheta udarnykh voln s povyshennymi svoystvami monotonnosti* [A Higher-Monotonicity Finite-Difference Shock Capture Method]. VNIITF Preprint, 1997, no. 120.
10. Kuropatenko V.F. Local Conservatism of Difference Schemes for Hydrodynamics Equations [Lokal'naya konservativnost' raznostnykh skhem dlya uravneniy gazovoy dinamiki]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1985, vol. 25, no. 8, pp. 1176–1188.
11. Kuropatenko V.F. Ultimate Conservatism of Finite-Difference Conservation Laws [O polnoy konservativnosti raznostnykh zakonov sokhraneniya]. *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Seriya: Chislennye metody resheniya zadach matematicheskoy fiziki* [Atomic Science and Engineering. Series: Numerical Methods of Mathematical Physics], Moscow, 1982, issue 3 (11), pp. 3–5.
12. Kuropatenko V.F. Entropy Accuracy in Finite Difference Schemes for Hydrodynamics Equations [O tochnosti vychisleniya entropii v raznostnykh skhemakh dlya uravneniy gazovoy dinamiki]. *Chislennye metody mekhaniki sploshnoy sredy* [Numerical Methods for Continuum Mechanics], Novosibirsk, 1978, vol. 9, no. 7, pp. 49–59.
13. Kuropatenko V.F. Divergence and Conservatism of Finite-Difference Schemes for Hydrodynamics Equations [Svyaz' divergentnosti s konservativnost'yu raznostnykh skhem dlya uravneniy gazovoy dinamiki]. *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov* [Atomic Science and Engineering. Series: Mathematical Modeling of Physical Processes], 1990, issue 2, pp. 63–69.
14. Kuropatenko V.F. Shock Calculation Methods [Metody rascheta udarnykh voln]. *Entsiklopediya nizkotemperaturnoy plazmy. Seriya B. Matematicheskoe modelirovanie v nizkotemperaturnoy plazme* [Encyclopedia of Low-Temperature Plasma. Series B. Mathematical Modelling of Low-Temperature Plasma], part 2, vol. VII-I, 2008, pp. 496–506.
15. Kuropatenko V.F. *Modeli mekhaniki sploshnoy sredy* [Continuum mechanics models]. Chelyabinsk, Chelyabinsk State University, 2007, 302 p.
16. Kuropatenko V.F., Dorovskikh I.A., Makeyeva I.R. The Properties of Finite Difference Schemes and Simulation of Dynamic Processes [O vliyanii svoystv raznostnykh skhem na matematicheskoe modelirovanie dinamicheskikh protsessov]. *Vychislitel'nye tekhnologii* [Computating Technologies], 2006, vol. 11, part 2, pp. 9–11.
17. Kuropatenko V.F., Kovalenko G.V., Kuznetsova V.I., Mikhaylova G.I. Complex Programs VOLNA and Method for Transient Flows of Continua [Kompleks programm VOLNA i neodnorodnyy raznostnyy metod dlya rascheta neustanovivshikhsya dvizheniy szhimaemykh sploshnykh sred]. *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov* [Atomic Science and Engineering, Series: Mathematical Modeling of Physical Processes], 1989, issue 2, pp. 9–25.

Поступила в редакцию 15 декабря 2013 г.