

ФОРМАЛИЗМ ВЫПИСЫВАНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ МАНИПУЛЯТОРОВ

А.И. Телегин

*Южно-Уральский государственный университет, филиал в г. Миассе,
г. Миасс, Россия*

Решается проблема громоздкости уравнений динамики манипуляционных систем промышленных роботов (манипуляторов), состоящих из поступательных и вращательных сочленений. Предложен новый формализм выписывания уравнений динамики манипуляторов в направляющих косинусах, из которых легко получить уравнения динамики в других параметрах относительной или абсолютной ориентации тел. Приведены примеры выписывания уравнений динамики манипуляторов в направляющих косинусах, из которых путем применения их свойств получены уравнения динамики в относительных углах поворота тел. Рассмотренные манипуляторы имеют от трех до шести степеней свободы. В их уравнениях динамики явно выражены геометрические, кинематические, статические и инерционные параметры. Множители при ускорениях и произведениях скоростей в выписанных уравнениях динамики являются оптимальными в смысле минимума арифметических операций (сложений и умножений), необходимых для их вычислений. Предложен JS-код и методика верификации уравнений динамики манипуляторов, записанных в аналитическом виде. Проблема в том, что при ручном выписывании уравнений возможны ошибки и опiski в промежуточных записях и конечном результате. Поэтому необходимо проверять результаты выписывания на отсутствие ошибок, т. е. выполнять верификацию формул вычисления составляющих уравнений динамики. Для этого можно использовать ПО, предназначенное для вычисления обобщенных движущих сил манипуляторов, т. е. решать первую задачу динамики. В качестве такого ПО здесь предлагается web-приложение, в котором JS-функция используется для верификации уравнений динамики манипуляторов. Разработана методика верификации формул вычисления обобщенных сил тяжести и множителей (коэффициентов) при обобщенных ускорениях и произведениях обобщенных скоростей в уравнениях динамики. Приведен пример верификации уравнений динамики универсального манипулятора с шестью степенями свободы в пространстве. **Целью исследования** является разработка формализма выписывания аналитического вида уравнений динамики манипуляторов в направляющих косинусах главных осей связанных систем координат тел, коэффициенты которых содержат минимальное количество арифметических операций. **Методы исследования** относятся к векторной и аналитической механике систем абсолютно твердых тел, к векторной алгебре, а также к системному анализу и программированию на скриптовых языках. **Результаты** исследования содержат два доказанных утверждения, формулы которых и методика их использования позволили вручную выписать уравнения динамики манипуляторов с тремя и шестью степенями подвижности как в направляющих косинусах, так и в обобщенных координатах. В обоих случаях упростить полученные уравнения невозможно. **Заключение.** Записанные аналитические виды уравнений динамики занимают несколько строк. По известным классическим формализмам (Лагранжа, Аппеля, Нильсена, Ньютона – Эйлера и т. д.) практически невозможно получить аналогичные результаты из-за большого количества сложных математических операций в их реализации и громоздкости получаемых формул.

Ключевые слова: промышленный робот, уравнения динамики, формализм выписывания, направляющие косинусы, повторное использование формул, JS-функция, верификация уравнений.

Введение

Основной проблемой практического использования уравнений динамики (УД) манипуляционных систем (МС) является их громоздкость. Это следствие неэффективности классических формализмов вывода УД МС. В частности, поэтому в научных статьях в качестве примеров демонстрируются, как правило, плоские двухзвенники [1–5]. До сих пор встречаются научные статьи, в которых по формализму Лагранжа на нескольких страницах выводятся УД простейших

МС [6, 7], в то время как современные формализмы позволяют выписывать УД таких МС в нескольких строках [8, 9].

Из-за громоздкости аналитических видов УД разрабатываются пошагово-алгоритмические методы исследования МС. Известны различные формулы вычисления коэффициентов УД МС и им соответствующее ПО. Рассматриваются как конкретные МС [10–14], так и классы МС [15]. Решаются задачи динамики [16] и управления движением тел МС [17]. Однако такие методы не позволяют эффективно решать задачи синтеза МС с заданными динамическими свойствами, а также синтезировать адаптивные ПИД-регуляторы программных движений тел МС или решать задачи оптимального управления МС в реальном масштабе времени.

Постановка задачи. Разработать простой формализм выписывания УД МС в аналитическом виде с минимальным числом арифметических операций и продемонстрировать его на примерах выписывания аналитических видов УД МС, имеющих от трех до шести подвижных тел.

1. Формальное описание МС

Присвоим неподвижному телу МС (стойке, станине) нулевой номер и свяжем с ним неподвижную систему координат (НСК) $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$. Здесь \bar{x} – орт оси абсцисс, направленной горизонтально вправо, \bar{y} – орт оси ординат, направленной вертикально вверх, \bar{z} – орт оси аппликат, направленной так, что НСК – правая. Следующие за НСК подвижные тела занумеруем числами 1, 2, 3, ..., N , где N – количество подвижных тел МС. С i -м телом свяжем точку O_i и назовем ее полюсом i -го тела. Полюс вращающегося тела выбираем на оси его относительного вращения и полюса тел максимально совмещаем. Тогда максимальное число межполюсных радиус-векторов $\bar{R}_i = \overline{O_{i-1}O_i}$ обнулится.

Введем следующие обозначения: \bar{q}_i – орт оси вращения i -го тела относительно $(i - 1)$ -го тела; \bar{p}_i – орт оси поступательного движения i -го тела относительно $(i - 1)$ -го тела; m_{oi} – масса i -го тела; \bar{c}_i – орт, направленный из полюса i -го тела в его центр масс (ЦМ) C_i ; $O_i\bar{x}_i\bar{y}_i\bar{z}_i$ – главная система координат i -го тела (ГСК(i)); m_i – масса i -й подсистемы МС, состоящей из i -го (корневого) тела и следующих за ним тел.

В процессе выписывания УД МС используются проекции на оси НСК статических моментов подсистем относительно полюсов их корневых тел. Векторы статических моментов можно выписать по обратной рекуррентной формуле [18]

$$\bar{m}_i = a_i\bar{c}_i + m_{i+1}\bar{R}_{i+1} + \bar{m}_{i+1}, \quad (1)$$

где $i = N, N - 1, \dots, 1$; $\bar{m}_{N+1} = \bar{R}_{N+1} = 0$; $a_i = m_{oi}|\overline{O_iC_i}|$ – модуль статического момента i -го тела относительно точки O_i . Для проекций на оси НСК векторов \bar{m}_i , \bar{R}_i и орт \bar{c}_i введем следующие обозначения: m_i^x, m_i^y, m_i^z – проекции вектора \bar{m}_i на оси НСК; R_i^x, R_i^y, R_i^z – проекции вектора \bar{R}_i на оси НСК; c_i^x, c_i^y, c_i^z – направляющие косинусы (НК) орта $\bar{c}_i = \overline{O_iC_i}/O_iC_i$ в НСК.

Для выписывания УД будем использовать формальное описание МС в виде таблиц. Основная таблица составляется на основе вербального описания, включающего кинематическую схему (КС) МС и, при необходимости, дополнительное словесное описание. На КС полюс i -го тела изображается точкой и надписью O_i , а ЦМ – звездочкой и надписью C_i . Точкой O_{oi} изображается положение полюса i -го поступательного тела в случае $q_i = 0$, где q_i – величина относительного поступательного перемещения i -го тела вдоль оси $O_i\bar{p}_i$. На КС i -е поступательное тело изображается в положении, когда орт $\bar{p}_i = \overline{O_{oi}O_i}/q_i$ указывает на положительное направление перемещения. На КС j -е вращательное тело изображается в исходном относительном положении, т. е. когда $q_j = 0$, где q_j – угол поворота j -го тела вокруг оси $O_j\bar{q}_j$ относительно $(j - 1)$ -го тела. Если смотреть навстречу оси $O_j\bar{q}_j$, то поворот против хода стрелки часов считается положительным.

На КС достаточно изобразить начало НСК, а также положения точек O_i , C_i , O_{oi} , так как положение осей НСК и ориентация в пространстве векторов \bar{R}_i , \bar{c}_i , \bar{p}_i следует из их определений. В дополнительном словесном описании нуждаются только положения орт \bar{q}_j и углы поворота q_j . Когда углы поворота всех тел равны нулю, тогда, по умолчанию, $\bar{q}_j = \bar{y}$, если ось вращения j -го

Управление в технических системах

тела вертикальна, $\bar{q}_j = \bar{x}$, если ось вращения горизонтальна, $\bar{q}_j = \bar{z}$, если ось вращения смотрит на наблюдателя. Угол поворота q_j откладывается от исходного до текущего положения выбранного органа, который жестко связан с j -м телом.

Формальное описание МС начинается с разложения орт \bar{q}_i, \bar{p}_i ($i = 1, 2, \dots, M$) по осям НСК. Затем определяются проекции на оси НСК межполюсных радиус-векторов $\bar{R}_i = \overline{O_{i-1}O_i}$ и статических моментов \bar{m}_i подсистем. В качестве примеров на рис. 1–3 приведены КС и в табл. 1–3 им соответствующие формальные описания рассматриваемых МС. В заголовке таблиц использованы введенные обозначения. Имена $q/p_i^x, q/p_i^y, q/p_i^z$ означают, что в i -й строке записываются НК q_i^x, q_i^y, q_i^z орта \bar{q}_i в НСК, если i -е сочленение вращательное, иначе записываются НК p_i^x, p_i^y, p_i^z орта \bar{p}_i в НСК.

Если из КС МС проекции векторов $\bar{q}_i, \bar{p}_i, \bar{R}_i$ на оси НСК не очевидны, то в таблице записываются их обозначения. Иначе записываются их выражения через $q_i, s_j = \sin(q_j), c_j = \cos(q_j)$ и геометрические параметры тел.

Проекции m_k^x, m_k^y, m_k^z вектора \bar{m}_k выписываются по формуле (1).

Рассмотрим примеры заполнения таблиц формального описания МС.

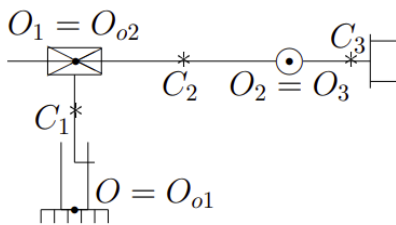


Рис. 1. МС с декартовой СК
Fig. 1. MS with cartesian CS

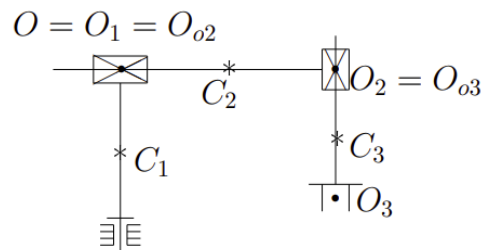


Рис. 2. МС с цилиндрической СК
Fig. 2. MS with cylindrical CS

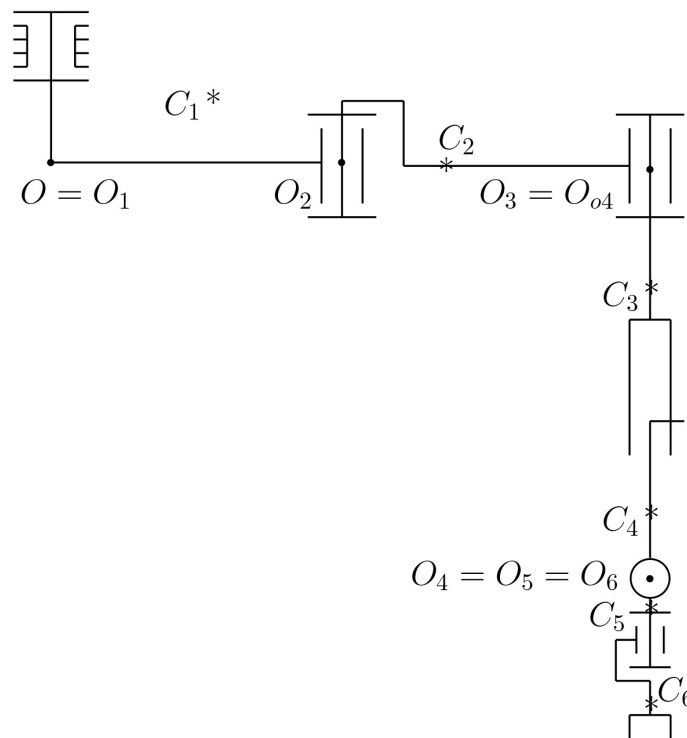


Рис. 3. МС с шестью степенями свободы
Fig. 3. MS with six freedom degree

Таблица 1

Параметры МС на рис. 1

Table 1

MS parameters in Fig. 1

i	q/p_i^x	q/p_i^y	q/p_i^z	R_i^x	R_i^y	R_i^z	m_1^x	m_1^y	m_1^z
1	/0	1	0	0	q_1	0	$m_2q_2 + a_3c_3 - a_2$	$a_3s_3 - a_1$	0
2	/1	0	0	q_2	0	0	$a_3c_3 - a_2$	a_3s_3	0
3	0	0	1	0	0	0	a_3c_3	a_3s_3	0

Таблица 2

Параметры МС на рис. 2

Table 2

MS parameters in Fig. 2

i	q/p_i^x	q/p_i^y	q/p_i^z	R_i^x	R_i^y	R_i^z	m_i^x	m_i^y	m_i^z
1	0	1	0	0	0	0	m_1^x	m_1^y	m_1^z
2	/c ₁	0	-s ₁	q_2c_1	0	$-q_2s_1$	$-a_2c_1$	$a_3 - m_3q_3$	a_2s_1
3	/0	-1	0	0	$-q_3$	0	0	a_3	0

Таблица 3

Параметры МС на рис. 3

Table 3

MS parameters in Fig. 3

i	q/p_i^x	q/p_i^y	q/p_i^z	R_i^x	R_i^y	R_i^z	m_i^x	m_i^y	m_i^z
1	0	1	0	0	0	0	m_1^x	m_1^y	m_1^z
2	0	1	0	L_1c_1	0	$-L_1s_1$	$bc_{12} - aq_6^x$	m_q	$-bs_{12} - aq_6^z$
3	0	1	0	L_2c_{12}	0	$-L_2s_{12}$	$-aq_6^x$	m_q	$-aq_6^z$
4	/0	-1	0	0	$-q_4$	0	$-aq_6^x$	$a_4 - ac_5$	$-aq_6^z$
5	s_{13}	0	c_{13}	0	0	0	$-aq_6^x$	$-ac_5$	$-aq_6^z$
6	q_6^x	c_5	q_6^z	0	0	0	$-a_6q_6^x$	$-a_6c_5$	$-a_6q_6^z$

Пример 1. Из КС на рис. 1 видно, что $N = 3$, $\bar{p}_1 = \bar{y}$, $\bar{p}_2 = \bar{x}$, $\bar{q}_3 = \bar{z}$, $\bar{R}_1 = \overline{O_0O_1} = q_1\bar{y}$, $\bar{R}_2 = \overline{O_1O_2} = q_2\bar{x}$, $\bar{R}_3 = \overline{O_2O_3} = 0$. Эта очевидная информация отражена в первых шести столбцах табл. 1. Угол q_3 откладывается от орта \bar{x} до орта \bar{c}_3 .

По формуле (1) и из рис. 1 получим $\bar{m}_3 = a_3\bar{c}_3 = a_3(c_3\bar{x} + s_3\bar{y})$, что отражено в трех последних столбцах 3-й строки табл. 1.

Для $i = 2$ по формуле (1) и рис. 1 получим

$$\bar{m}_2 = a_2\bar{c}_2 + m_3\bar{R}_3 + \bar{m}_3 = a_2(-\bar{x}) + \bar{m}_3 = (a_3c_3 - a_2)\bar{x} + a_3s_3\bar{y}.$$

Для $i = 1$ по формуле (1) и рис. 1 получим

$$\bar{m}_1 = a_1\bar{c}_1 + m_2\bar{R}_2 + \bar{m}_2 = a_1(-\bar{y}) + m_2q_2\bar{x} + \bar{m}_2 = (m_2q_2 + a_3c_3 - a_2)\bar{x} + (a_3s_3 - a_1)\bar{y}.$$

Коэффициенты полученных разложений векторов \bar{m}_2 , \bar{m}_1 по осям НСК записаны соответственно во 2-й и 1-й строках табл. 1.

Пример 2. Из КС на рис. 2 видно, что $N = 3$, $\bar{q}_1 = \bar{y}$, $\bar{p}_3 = -\bar{y}$, $\bar{R}_1 = \overline{O_0O_1} = 0$, $\bar{R}_3 = \overline{O_2O_3} = -q_3\bar{y}$. Угол q_1 откладываем от орта \bar{x} до орта \bar{p}_2 , направленного по определению из точки O_{o2} в точку O_2 . Тогда $\bar{p}_2 = c_1\bar{x} - s_1\bar{z}$ и $\bar{R}_2 = \overline{O_1O_2} = q_2c_1\bar{x} - q_2s_1\bar{z}$. Следовательно, $p_2^x = c_1$, $p_2^y = 0$, $p_2^z = -s_1$, $R_2^x = q_2c_1$, $R_2^y = 0$, $R_2^z = -q_2s_1$, что отражено во 2-й строке табл. 2.

По формуле (1) и рис. 2 получим $\bar{m}_3 = a_3\bar{c}_3 = a_3\bar{y}$.

Для $i = 2$ по формуле (1) и рис. 2 получим

$$\begin{aligned} \bar{m}_2 &= a_2\bar{c}_2 + m_3\bar{R}_3 + \bar{m}_3 = a_2(-\bar{p}_2) - m_3q_3\bar{y} + a_3\bar{y} = \\ &= -a_2(c_1\bar{x} - s_1\bar{z}) - m_3q_3\bar{y} + a_3\bar{y} = -a_2c_1\bar{x} + (a_3 - m_3q_3)\bar{y} + a_2s_1\bar{z}. \end{aligned}$$

Пример 3. Из КС на рис. 3 видно, что $N = 6$, $\bar{q}_1 = \bar{q}_2 = \bar{q}_3 = \bar{y}$, $\bar{p}_4 = -\bar{y}$, $\bar{q}_5 = s_{13}\bar{x} + c_{13}\bar{z}$, где $s_{13} = \sin(q_{13})$, $c_{13} = \cos(q_{13})$, $q_{13} = q_1 + q_2 + q_3$. $\bar{q}_6 = q_6^x\bar{x} + c_5\bar{y} + q_6^z\bar{z}$. Здесь использованы обозначения для НК q_6^x , q_6^z , так как формулы их вычисления не очевидны. Их мы найдем после выписывания УД.

Для межполюсных векторов очевидны следующие разложения по осям НСК:

$$\bar{R}_1 = 0, \bar{R}_2 = L_1c_1\bar{x} - L_1s_1\bar{z}, \bar{R}_3 = L_2c_{12}\bar{x} - L_2s_{12}\bar{z},$$

где $s_{12} = \sin(q_{12})$, $c_{12} = \cos(q_{12})$, $q_{12} = q_1 + q_2$, $\bar{R}_4 = -q_4\bar{y}$, $\bar{R}_5 = \bar{R}_6 = 0$.

По формуле (1) и рис. 3 получим

$$\bar{m}_6 = a_6\bar{c}_6 = -a_6\bar{q}_6 = -a_6(q_6^x\bar{x} + c_5\bar{y} + q_6^z\bar{z}).$$

Для $i = 5$ по формуле (1) и рис. 3 получим

$$\bar{m}_5 = a_5\bar{c}_5 + m_6\bar{R}_6 + \bar{m}_6 = a_5(-\bar{q}_6) + \bar{m}_6 = -a_5\bar{q}_6 - a_6\bar{q}_6 = -a\bar{q}_6 = -a(q_6^x\bar{x} + c_5\bar{y} + q_6^z\bar{z}),$$

где $a = a_5 + a_6$.

Для $i = 4$ по формуле (1) и рис. 3 получим

$$\bar{m}_4 = a_4\bar{c}_4 + m_5\bar{R}_5 + \bar{m}_5 = a_4\bar{y} + \bar{m}_5 = -aq_6^x\bar{x} + (a_4 - ac_5)\bar{y} - aq_6^z\bar{z}.$$

Для $i = 3$ по формуле (1) и рис. 3 получим

$$\bar{m}_3 = a_3\bar{c}_3 + m_4\bar{R}_4 + \bar{m}_4 = a_3(-\bar{y}) - m_4q_4\bar{y} + \bar{m}_4 = -aq_6^x\bar{x} + m_q\bar{y} - aq_6^z\bar{z},$$

где $m_q = a_4 - ac_5 - a_3 - m_4q_4$.

Для $i = 2$ по формуле (1) и рис. 3 получим:

$$\begin{aligned} \bar{m}_2 &= a_2\bar{c}_2 + m_3\bar{R}_3 + \bar{m}_3 = a_2(c_{12}\bar{x} - s_{12}\bar{z}) + m_3L_2(c_{12}\bar{x} - s_{12}\bar{z}) - aq_6^x\bar{x} + m_q\bar{y} - aq_6^z\bar{z} = \\ &= [(a_2 + m_3L_2)c_{12} - aq_6^x]\bar{x} + m_q\bar{y} - [(a_2 + m_3L_2)s_{12} + aq_6^z]\bar{z} = \\ &= (bc_{12} - aq_6^x)\bar{x} + m_q\bar{y} - (bs_{12} + aq_6^z)\bar{z}, \end{aligned}$$

где $b = a_2 + m_3L_2$.

Коэффициенты полученных разложений векторов \bar{m}_i по осям НСК записаны в последних трех столбцах табл. 3.

2. Формализм выписывания УД МС

Ручное выписывание УД состоит из последовательности формальных действий, осуществляемых на основе таблицы формального описания и КС МС по формулам утверждений 1, 2. Доказательство утверждений приведено в конце статьи. Здесь на примерах МС с тремя и шестью степенями подвижности демонстрируется формализм выписывания УД в НК и переход к записи УД в относительных углах поворота тел вращательных сочленений.

Утверждение 1. Для j -го поступательного сочленения движущая сила

$$F_j = p_j^x(m_j\ddot{R}_{1j}^x + \dot{m}_j^x) + p_j^y(m_j\ddot{R}_{1j}^y + \dot{m}_j^y) + p_j^z(m_j\ddot{R}_{1j}^z + \dot{m}_j^z) + m_jgp_j^y, \quad (2)$$

где $R_{1j}^x = \sum_{i=1}^j R_i^x$, $R_{1j}^y = \sum_{i=1}^j R_i^y$, $R_{1j}^z = \sum_{i=1}^j R_i^z$.

Для j -го вращательного сочленения момент движущей силы

$$\begin{aligned} M_j &= q_j^x(m_j^y\ddot{R}_{1j}^x - m_j^z\ddot{R}_{1j}^z + \dot{M}_{j+1}^x) + q_j^y(m_j^z\ddot{R}_{1j}^z - m_j^x\ddot{R}_{1j}^x + \dot{M}_{j+1}^y) + \\ &+ q_j^z(m_j^x\ddot{R}_{1j}^x - m_j^y\ddot{R}_{1j}^y + \dot{M}_{j+1}^z) + \dot{K}_j + G_j, \end{aligned} \quad (3)$$

где $M_{N+1}^x = M_{N+1}^y = M_{N+1}^z = 0$,

$$M_{j+1}^x = \sum_{k=j+1}^N [m_k(R_k^y\dot{R}_k^z - R_k^z\dot{R}_k^y) + m_k^y\dot{R}_k^z - R_k^z\dot{m}_k^y + R_k^y\dot{m}_k^z - m_k^z\dot{R}_k^y],$$

$$M_{j+1}^y = \sum_{k=j+1}^N [m_k(R_k^z\dot{R}_k^x - R_k^x\dot{R}_k^z) + m_k^z\dot{R}_k^x - R_k^x\dot{m}_k^z + R_k^z\dot{m}_k^x - m_k^x\dot{R}_k^z],$$

$$M_{j+1}^z = \sum_{k=j+1}^N [m_k(R_k^x\dot{R}_k^y - R_k^y\dot{R}_k^x) + m_k^x\dot{R}_k^y - R_k^y\dot{m}_k^x + R_k^x\dot{m}_k^y - m_k^y\dot{R}_k^x].$$

Скорость кинетического момента тел j -й подсистемы относительно оси $O_j\bar{q}_j$ вычисляется по формуле $\dot{K}_j = \sum_{k=j}^N \dot{K}_{jk}$, где

$$\dot{K}_{jk} = q_{jk}^x(J_{ok}^x\dot{\omega}_k^x + A_k\omega_k^y\omega_k^z) + q_{jk}^y(J_{ok}^y\dot{\omega}_k^y + B_k\omega_k^x\omega_k^z) + q_{jk}^z(J_{ok}^z\dot{\omega}_k^z + D_k\omega_k^x\omega_k^y), \quad (4)$$

$J_{ok}^x, J_{ok}^y, J_{ok}^z$ – моменты инерции k -го тела относительно осей $O_k\bar{x}_k, O_k\bar{y}_k, O_k\bar{z}_k$ ГСК(k) соответственно; $A_k = J_{ok}^z - J_{ok}^y$; $B_k = J_{ok}^x - J_{ok}^z$; $D_k = J_{ok}^y - J_{ok}^x$; $\omega_k^x, \omega_k^y, \omega_k^z$ – проекции абсолютной угловой скорости k -го тела (вектора $\bar{\omega}_k$) на оси ГСК(k);

$$q_{jk}^x = \bar{q}_j \cdot \bar{x}_k, q_{jk}^y = \bar{q}_j \cdot \bar{y}_k, q_{jk}^z = \bar{q}_j \cdot \bar{z}_k.$$

Момент силы тяжести, приведенный к оси вращения j -го тела:

$$G_j = g(q_j^z m_j^x - q_j^x m_j^z). \quad (5)$$

Пример 1 (продолжение). МС с декартовой СК в вертикальной плоскости (см. рис. 1). Формальное описание этой МС представлено в табл. 1. Следовательно, $p_1^x = p_1^z = 0$, $p_1^y = 1$ и формула (2) для $j = 1$ принимает вид $F_1 = m_1 \ddot{R}_{11}^y + \dot{m}_1^y + m_1 g$, где $\ddot{R}_{11}^y = \ddot{R}_1^y$. Отсюда по табл. 1 получим $F_1 = m_1 \ddot{q}_1 + a_3 \ddot{s}_3 + m_1 g$. Для $j = 2$ в формуле (2) имеем $p_2^x = 1$, $p_2^y = p_2^z = 0$ и, следовательно, $F_2 = m_2 \ddot{R}_{12}^x + \dot{m}_2^x$, где $\ddot{R}_{12}^x = \ddot{R}_1^x + \ddot{R}_2^x$. Отсюда по табл. 1 получим $F_2 = m_2 \ddot{q}_2 + a_3 \ddot{c}_3$.

Для $j = 3$ в формуле (3) имеем $q_3^x = q_3^z = 0$, $q_3^y = 1$ и, следовательно,

$$M_3 = m_3^x \ddot{R}_{13}^y - m_3^y \ddot{R}_{13}^x + \dot{K}_3 + G_3, \quad \ddot{R}_{13}^y = \sum_{i=1}^3 \ddot{R}_i^y, \quad \ddot{R}_{13}^x = \sum_{i=1}^3 \ddot{R}_i^x,$$

где по формуле (5) и табл. 1 получим $G_3 = g(q_3^z m_3^x - q_3^x m_3^z) = g a_3 c_3 = g a_3 c_3$. Теперь, используя табл. 1, получим $M_3 = a_3 c_3 \ddot{q}_1 - a_3 c_3 \ddot{q}_2 + \dot{K}_3 + g a_3 c_3$, где по формуле (4) с учетом равенств $q_{33}^x = q_{33}^z = 0$, $q_{33}^y = 1$, $\omega_3^x = 0$, $\omega_3^y = 0$, выпишем $\dot{K}_3 = J_{o_3}^z \dot{\omega}_3^z$.

Таким образом, УД в НК для МС на рис. 1 имеют следующий вид:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{q}_1 + a_3 \ddot{s}_3 + m_1 g = F_1, \\ m_2 \ddot{q}_2 + a_3 \ddot{c}_3 = F_2, \\ J_{o_3}^z \dot{\omega}_3^z + a_3 (c_3 \ddot{q}_1 - s_3 \ddot{q}_2) + g a_3 c_3 = M_3. \end{cases}$$

Видно, что УД 1-го и 2-го тел интегрируются.

Известны формулы [19]

$$\omega_k^x = z_k^x \dot{y}_k^y + z_k^y \dot{y}_k^x + z_k^z \dot{y}_k^z, \quad \omega_k^y = x_k^x \dot{z}_k^x + x_k^y \dot{z}_k^y + x_k^z \dot{z}_k^z, \quad \omega_k^z = y_k^x \dot{x}_k^x + y_k^y \dot{x}_k^y + y_k^z \dot{x}_k^z, \quad (6)$$

где x_k^x, x_k^y, x_k^z – НК орта \bar{x}_k оси абсцисс ГСК(k) в НСК; y_k^x, y_k^y, y_k^z – НК орта \bar{y}_k оси ординат ГСК(k) в НСК; z_k^x, z_k^y, z_k^z – НК орта \bar{z}_k оси аппликат ГСК(k) в НСК. Из третьей формулы получим $\omega_3^z = y_3^x \dot{x}_3^x + y_3^y \dot{x}_3^y + y_3^z \dot{x}_3^z$. Угол q_3 откладывается от горизонтальной оси до главной оси 3-го тела $O_3 \bar{x}_3$. Следовательно, $y_3^x = -s_3$, $x_3^x = c_3$, $y_3^y = c_3$, $x_3^y = s_3$, $y_3^z = 0$ и $\omega_3^z = -s_3 \dot{c}_3 + c_3 \dot{s}_3 = \dot{q}_3$.

Для перехода от УД в НК к УД в относительных углах поворота тел используются следующие свойства простых НК:

$$\ddot{s}_i = c_i \ddot{q}_i - s_i \dot{q}_i^2, \quad \ddot{c}_i = -s_i \ddot{q}_i - c_i \dot{q}_i^2, \quad c_i \dot{s}_i - s_i \dot{c}_i = \dot{q}_i, \quad (7)$$

$$s_i \ddot{c}_i - c_i \ddot{s}_i = -\dot{q}_i, \quad s_i \dot{s}_i + c_i \dot{c}_i = -\dot{q}_i^2. \quad (8)$$

Эти формулы легко проверить непосредственным вычислением производных.

Из предшествующих УД для МС на рис. 1, используя формулы (7), получим УД в углах поворота тел:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{q}_1 + a_3 (c_3 \ddot{q}_3 - s_3 \dot{q}_3^2) + m_1 g = F_1, \\ m_2 \ddot{q}_2 - a_3 (s_3 \ddot{q}_3 + c_3 \dot{q}_3^2) = F_2, \\ J_{o_3}^z \dot{q}_3 + a_3 (c_3 \ddot{q}_1 - s_3 \ddot{q}_2) + g a_3 c_3 = M_3. \end{cases}$$

Пример 2 (продолжение). МС с цилиндрической СК (см. рис. 3). Формальное описание этой МС представлено в табл. 2. Следовательно, в формуле (2) для $j = 2$ имеем:

$$p_2^x = c_1, p_2^y = 0, p_2^z = -s_1 \text{ и } F_2 = c_1 (m_2 \ddot{R}_{12}^x + \dot{m}_2^x) - s_1 (m_2 \ddot{R}_{12}^z + \dot{m}_2^z),$$

где $\ddot{R}_{12}^x = \ddot{R}_1^x + \ddot{R}_2^x$, $\ddot{R}_{12}^z = \ddot{R}_1^z + \ddot{R}_2^z$. Отсюда по табл. 2 получим

$$\begin{aligned} F_2 &= c_1 [m_2 (q_2 c_1)''_{t^2} - a_2 \ddot{c}_1] - s_1 [m_2 (-q_2 s_1)''_{t^2} + a_2 \ddot{s}_1] = \\ &= c_1 [m_2 (\dot{q}_2 c_1 + q_2 \dot{c}_1)'_t - a_2 \ddot{c}_1] + s_1 [m_2 (\dot{q}_2 s_1 + q_2 \dot{s}_1)'_t - a_2 \ddot{s}_1] = \\ &= c_1 [m_2 (\ddot{q}_2 c_1 + 2\dot{q}_2 \dot{c}_1 + q_2 \ddot{c}_1) - a_2 \ddot{c}_1] + s_1 [m_2 (\ddot{q}_2 s_1 + 2\dot{q}_2 \dot{s}_1 + q_2 \ddot{s}_1) - a_2 \ddot{s}_1] = \\ &= m_2 \ddot{q}_2 + 2m_2 \dot{q}_2 (c_1 \dot{c}_1 + s_1 \dot{s}_1) + m_2 q_2 (c_1 \ddot{c}_1 + s_1 \ddot{s}_1) - a_2 (c_1 \ddot{c}_1 + s_1 \ddot{s}_1) = \\ &= m_2 \ddot{q}_2 + (m_2 q_2 - a_2) (c_1 \dot{c}_1 + s_1 \dot{s}_1). \end{aligned}$$

Для $j = 3$ по формуле (2) и по табл. 2 получим

$$F_3 = -m_3 \ddot{R}_{13}^y - \dot{m}_3^y - m_3 g = -m_3 \sum_{i=1}^3 \ddot{R}_i^y - \dot{m}_3^y - m_3 g = m_3 \ddot{q}_3 - m_3 g.$$

Для $j = 1$ в формуле (3) имеем $q_1^y = 1$, $q_1^x = q_1^z = 0$ и, следовательно,

$$M_1 = m_1^z \ddot{R}_{11}^x - m_1^x \ddot{R}_{11}^z + \dot{K}_1 + G_1,$$

где по формуле (5) $G_1 = g(q_1^z m_1^x - q_1^x m_1^z) = 0$.

Из табл. 2 имеем $R_1^x = R_1^z = 0, R_3^x = R_3^z = 0$. Следовательно, $M_1 = \dot{M}_2^y + \dot{K}_1$, где

$$M_2^y = m_2(R_2^z \dot{R}_2^x - R_2^x \dot{R}_2^z) + m_2^z \dot{R}_2^x - R_2^x \dot{m}_2^z + R_2^z \dot{m}_2^x - m_2^x \dot{R}_2^z = \\ = (m_2 R_2^z + m_2^z) \dot{R}_2^x - (m_2 R_2^x + m_2^x) \dot{R}_2^z - R_2^x \dot{m}_2^z + R_2^z \dot{m}_2^x$$

и по табл. 2 получим

$$M_2^y = [m_2(-q_2 s_1) + a_2 s_1](q_2 c_1)'_t - (m_2 q_2 c_1 - a_2 c_1)(-q_2 s_1)'_t - a_2 q_2 c_1 \dot{s}_1 + a_2 q_2 s_1 \dot{c}_1 = \\ = -(m_2 q_2 - a_2)[s_1(q_2 c_1)'_t - c_1(q_2 s_1)'_t] + a_2 q_2 (s_1 \dot{c}_1 - c_1 \dot{s}_1) = \\ = -(m_2 q_2 - a_2)[s_1(\dot{q}_2 c_1 + q_2 \dot{c}_1) - c_1(\dot{q}_2 s_1 + q_2 \dot{s}_1)] + a_2 q_2 (s_1 \dot{c}_1 - c_1 \dot{s}_1) = \\ = (a_2 - m_2 q_2) q_2 (s_1 \dot{c}_1 - c_1 \dot{s}_1) + a_2 q_2 (s_1 \dot{c}_1 - c_1 \dot{s}_1) = (2a_2 - m_2 q_2) q_2 (s_1 \dot{c}_1 - c_1 \dot{s}_1).$$

С учетом равенств $\bar{\omega}_k = \dot{q}_1 \bar{y}, q_{1k}^x = q_{1k}^z = 0, q_{1k}^y = 1, \omega_k^x = \omega_k^z = 0, k = 1, 2, 3$ по формуле (4) выпишем $\dot{K}_1 = J_{01}^y \dot{\omega}_1^y + J_{02}^y \dot{\omega}_2^y + J_{03}^y \dot{\omega}_3^y = J_{13}^y \dot{\omega}_1^y$, где $J_{13}^y = J_{01}^y + J_{02}^y + J_{03}^y$. По второй формуле (6) с учетом равенств $x_i^x = c_1, x_i^z = -s_1, z_i^x = s_1, z_i^z = c_1$ получим $\omega_i^y = x_i^x \dot{z}_i^x + x_i^y \dot{z}_i^y + x_i^z \dot{z}_i^z = c_1 \dot{s}_1 - s_1 \dot{c}_1$, где $i = 1, 2, 3$. Следовательно,

$$\dot{K}_1 = J_{13}^y (c_1 \dot{s}_1 - s_1 \dot{c}_1)'_t \text{ и}$$

$$M_1 = [(2a_2 - m_2 q_2) q_2 (s_1 \dot{c}_1 - c_1 \dot{s}_1)]'_t + J_{13}^y (c_1 \dot{s}_1 - s_1 \dot{c}_1)'_t = \\ = [J_{13}^y - 2a_2 q_2 + m_2 q_2^2] (c_1 \dot{s}_1 - s_1 \dot{c}_1)'_t.$$

Таким образом, УД рассматриваемой МС в НК имеют следующий вид:

$$\begin{cases} [J_{13}^y + m_2 q_2^2 - 2a_2 q_2] (c_1 \dot{s}_1 - s_1 \dot{c}_1)'_t = M_1, \\ m_2 \ddot{q}_2 + (m_2 q_2 - a_2) (c_1 \ddot{c}_1 + s_1 \ddot{s}_1) = F_2, \\ m_3 \ddot{q}_3 - m_3 g = F_3. \end{cases}$$

Для представления этих УД в углах вращательных сочленений используем формулы (7), (8).

Тогда получим следующие УД:

$$\begin{cases} [J_{13}^y + m_2 q_2^2 - 2a_2 q_2] \dot{q}_1'_t = M_1, \\ m_2 \ddot{q}_2 + (a_2 - m_2 q_2) \dot{q}_1^2 = F_2, \\ m_3 \ddot{q}_3 - m_3 g = F_3. \end{cases}$$

Для упрощения процесса выписывания УД МС с параллельными осями вращательных сочленений рекомендуем использовать

Утверждение 2. Если $\bar{q}_{j-1} = \bar{q}_j$, то

$$M_{j-1} = M_j + g[q_j^z (m_{j-1}^x - m_j^x) - q_j^x (m_{j-1}^z - m_j^z)] + \dot{K}_{j-1, j-1} + \\ + q_j^x [m_j (R_j^y \dot{R}_j^z - R_j^z \dot{R}_j^y)]'_t + R_j^y \dot{m}_j^z - R_j^z \dot{m}_j^y + (m_{j-1}^y - m_j^y) \dot{R}_{1j-1}^z - (m_{j-1}^z - m_j^z) \dot{R}_{1j-1}^y + \\ + q_j^y [m_j (R_j^x \dot{R}_j^z - R_j^z \dot{R}_j^x)]'_t + R_j^x \dot{m}_j^z - R_j^z \dot{m}_j^x + (m_{j-1}^x - m_j^x) \dot{R}_{1j-1}^z - (m_{j-1}^z - m_j^z) \dot{R}_{1j-1}^x + \\ + q_j^z [m_j (R_j^x \dot{R}_j^y - R_j^y \dot{R}_j^x)]'_t + R_j^x \dot{m}_j^y - R_j^y \dot{m}_j^x + (m_{j-1}^x - m_j^x) \dot{R}_{1j-1}^y - (m_{j-1}^y - m_j^y) \dot{R}_{1j-1}^x].$$

Пример 3 (продолжение). МС с КС на рис. 3. Формальное описание этой МС представлено в табл. 3. Следовательно, в формуле (2) для $j = 4$ имеем:

$$p_4^y = -1, p_4^x = p_4^z = 0 \text{ и } F_4 = -m_4 \ddot{R}_{14}^y - \ddot{m}_4^y - m_4 g,$$

где $\ddot{R}_{14}^y = \sum_{i=1}^4 \ddot{R}_i^y$. Отсюда с учетом табл. 3 получим $F_4 = m_4 \ddot{q}_4 + a \ddot{c}_5 - m_4 g$.

Для $j = 6$ по формуле (3) и табл. 3 выпишем

$$M_6 = q_6^x [m_6^y (\ddot{R}_2^z + \ddot{R}_3^z) - m_6^z \ddot{R}_4^y] + c_5 [m_6^z (\ddot{R}_2^x + \ddot{R}_3^x) - m_6^x (\ddot{R}_2^z + \ddot{R}_3^z)] + \\ + q_6^z [m_6^x \ddot{R}_4^y - m_6^y (\ddot{R}_2^x + \ddot{R}_3^x)] + \dot{K}_6 + G_6 = a_6 (q_6^x q_6^z - q_6^z q_6^x) \ddot{R}_4^y - \\ - a_6 (c_5 q_6^z - c_5 q_6^z) (\ddot{R}_2^x + \ddot{R}_3^x) + a_6 (c_5 q_6^x - q_6^x c_5) (\ddot{R}_2^z + \ddot{R}_3^z) + \dot{K}_6 + G_6 = \dot{K}_6 + G_6,$$

где по формуле (5) получим $G_6 = g(q_6^z m_6^x - q_6^x m_6^z) = g[q_6^z (-a_6 q_6^x) - q_6^x (-a_6 q_6^z)] = 0$. Тогда $M_6 = \dot{K}_6$, где по формуле (4) с учетом равенств $y_{66}^x = y_{66}^z = 0, y_{66}^y = 1$ получим

$$M_6 = \dot{K}_6 = J_{06}^y \dot{\omega}_6^y + B_6 \omega_6^x \omega_6^z.$$

Для $j = 5$ по формуле (3) с учетом равенств $R_6^x = R_6^y = R_6^z = 0$ выпишем

$$M_5 = q_5^x [m_5^y (\ddot{R}_2^z + \ddot{R}_3^z) - m_5^z \ddot{R}_4^y] + q_5^z [m_5^x \ddot{R}_4^y - m_5^y (\ddot{R}_2^x + \ddot{R}_3^x)] + \dot{K}_5 + G_5 = \\ = (q_5^z m_5^x - q_5^x m_5^z) \ddot{R}_4^y + m_5^y [q_5^x (\ddot{R}_2^z + \ddot{R}_3^z) - q_5^z (\ddot{R}_2^x + \ddot{R}_3^x)] + \dot{K}_5 + G_5,$$

где по формуле (5) и табл. 3 получим

$$G_5 = g(q_5^z m_5^x - q_5^x m_5^z) = g[q_5^z(-aq_6^x) - q_5^x(-aq_6^z)] = -ag(q_5^z q_6^x - q_5^x q_6^z).$$

Учитывая равенства $\bar{q}_5 = \bar{z}_5$, $\bar{q}_6 = \bar{y}_5$ и формулу

$$\bar{\eta}_j \times \bar{\xi}_j = (\eta_j^y \xi_j^z - \eta_j^z \xi_j^y) \bar{x} + (\eta_j^z \xi_j^x - \eta_j^x \xi_j^z) \bar{y} + (\eta_j^x \xi_j^y - \eta_j^y \xi_j^x) \bar{z} \quad (9)$$

векторного произведения орт СК, получим

$$q_5^z q_6^x - q_5^x q_6^z = z_5^z y_5^x - z_5^x y_5^z = \bar{z}_5 \times \bar{y}_5 \cdot \bar{y} = -\bar{x}_5 \cdot \bar{y} = -x_5^y = -\cos(90^\circ - q_5) = -s_5.$$

Таким образом, используя табл. 3, получим

$$M_5 = -a(q_5^z q_6^x - q_5^x q_6^z) \ddot{R}_4^y - ac_5[s_{13}(-L_1 \ddot{s}_1 - L_2 \ddot{s}_{12}) - c_{13}(L_1 \ddot{c}_1 + L_2 \ddot{c}_{12})] + \dot{K}_5 + ags_5 =$$

$$= -as_5 \ddot{q}_4 + ac_5[L_1(s_{13} \ddot{s}_1 + c_{13} \ddot{c}_1) + L_2(s_{13} \ddot{s}_{12} + c_{13} \ddot{c}_{12})] + \dot{K}_5 + ags_5,$$

где по формуле (4) с учетом равенств $\bar{q}_5 = \bar{z}_5$, $q_{55}^x = q_{55}^y = 0$, $q_{55}^z = 1$, $z_{56}^x = -s_6$, $z_{56}^y = 0$, $z_{56}^z = c_6$ получим

$$\dot{K}_5 = J_{05}^z \dot{\omega}_5^z + D_5 \omega_5^x \omega_5^y - s_6(J_{06}^x \dot{\omega}_6^x + A_6 \omega_6^y \omega_6^z) + c_6(J_{06}^z \dot{\omega}_6^z + D_6 \omega_6^x \omega_6^y).$$

По формуле (3) и табл. 3 для $j = 3$ имеем

$$M_3 = m_3^z(\ddot{R}_2^x + \ddot{R}_3^x) - m_3^x(\ddot{R}_2^z + \ddot{R}_3^z) + \dot{M}_4^y + \dot{K}_3 + G_3,$$

где $M_4^y = 0$ и по формуле (5) $G_3 = g(q_3^z m_3^x - q_3^x m_3^z) = 0$. Отсюда, используя табл. 3, получим

$$M_3 = -aq_6^z(L_1 \ddot{c}_1 + L_2 \ddot{c}_{12}) - aq_6^x(L_1 \ddot{s}_1 + L_2 \ddot{s}_{12}) + \dot{K}_3.$$

Учитывая равенства $y_{33}^x = y_{33}^z = 0$, $y_{33}^y = 1$, $\omega_3^x = \omega_3^z = 0$, $y_{34}^x = y_{34}^z = 0$, $y_{34}^y = 1$, $\omega_4^y = \dot{q}_3$, $\omega_4^x = \omega_4^z = 0$, $\bar{y}_3 = s_5 \bar{x}_5 + c_5 \bar{y}_5$, $y_{35}^z = 0$, по формуле (4) получим

$$\dot{K}_3 = J_{03}^y \dot{\omega}_3^y + J_{04}^y \dot{\omega}_3^y + s_5(J_{05}^x \dot{\omega}_5^x + A_5 \omega_5^y \omega_5^z) + c_5(J_{05}^y \dot{\omega}_5^y + B_5 \omega_5^x \omega_5^z) +$$

$$+ q_{36}^x(J_{06}^x \dot{\omega}_6^x + A_6 \omega_6^y \omega_6^z) + q_{36}^y(J_{06}^y \dot{\omega}_6^y + B_6 \omega_6^x \omega_6^z) + q_{36}^z(J_{06}^z \dot{\omega}_6^z + D_6 \omega_6^x \omega_6^y),$$

где с учетом равенства $\bar{q}_3 = \bar{y}$ имеем $q_{36}^x = \bar{y} \cdot \bar{x}_6 = x_6^y$, $q_{36}^y = y_6^y = c_5$, $q_{36}^z = z_6^y$. Таким образом,

$$M_3 = -aL_1(q_6^z \ddot{c}_1 + q_6^x \ddot{s}_1) - aL_2(q_6^z \ddot{c}_{12} + q_6^x \ddot{s}_{12}) + \dot{K}_3.$$

Учитывая равенство $\bar{q}_2 = \bar{q}_3 = \bar{y}$, по утверждению 2 получим

$$M_2 = M_3 + \dot{K}_{22} + m_3(R_3^z \dot{R}_3^x - R_3^x \dot{R}_3^z)_t + R_3^z \ddot{m}_3^x - R_3^x \ddot{m}_3^z + (m_2^z - m_3^z) \ddot{R}_{12}^x - (m_2^x - m_3^x) \ddot{R}_{12}^z,$$

где по формуле (4) с учетом равенств $q_{22}^x = q_{22}^z = 0$, $q_{22}^y = 1$, $\omega_2^x = \omega_2^z = 0$ получим

$\dot{K}_{22} = J_{02}^y \dot{\omega}_2^y + B_2 \omega_2^x \omega_2^z = J_{02}^y \dot{\omega}_2^y$. Теперь по табл. 3 получим

$$M_2 = M_3 + J_{02}^y \dot{\omega}_2^y + m_3 L_2^2 (-s_{12} \ddot{c}_{12} + c_{12} \ddot{s}_{12})_t + aL_2(s_{12} \ddot{q}_6^x + c_{12} \ddot{q}_6^z) - bs_{12} L_1 \ddot{c}_1 + bc_{12} L_1 \ddot{s}_1.$$

Учитывая равенство $\bar{q}_1 = \bar{q}_2 = \bar{y}$, по утверждению 2 получим

$$M_1 = M_2 + \dot{K}_{11} + m_2(R_2^z \dot{R}_2^x - R_2^x \dot{R}_2^z)_t + R_2^z \ddot{m}_2^x - R_2^x \ddot{m}_2^z + (m_1^z - m_2^z) \ddot{R}_{11}^x - (m_1^x - m_2^x) \ddot{R}_{11}^z,$$

где по формуле (4) с учетом равенств $q_{11}^x = q_{11}^z = 0$, $q_{11}^y = 1$, $\omega_1^x = \omega_1^z = 0$ получим

$\dot{K}_{11} = J_{01}^y \dot{\omega}_1^y + B_1 \omega_1^x \omega_1^z = J_{01}^y \dot{\omega}_1^y$. Теперь по табл. 3 получим

$$M_1 = M_2 + J_{01}^y \dot{\omega}_1^y + m_2 L_1^2 (-s_1 \ddot{c}_1 + c_1 \ddot{s}_1)_t + (-L_1 s_1)(b \ddot{c}_{12} - a \ddot{q}_6^x) + L_1 c_1 (b \ddot{s}_{12} + a \ddot{q}_6^z).$$

По формуле (6) имеем

$$\omega_1^y = x_1^x \dot{z}_1^x + x_1^y \dot{z}_1^y + x_1^z \dot{z}_1^z = c_1 \dot{s}_1 - s_1 \dot{c}_1, \omega_2^y = x_2^x \dot{z}_2^x + x_2^y \dot{z}_2^y + x_2^z \dot{z}_2^z = c_{12} \dot{s}_{12} - s_{12} \dot{c}_{12}.$$

Следовательно,

$$M_2 = M_3 + J_2^y \dot{\omega}_2^y + aL_2(s_{12} \ddot{q}_6^x + c_{12} \ddot{q}_6^z) + bL_1(c_{12} \dot{s}_1 - s_{12} \dot{c}_1),$$

$$M_1 = M_2 + J_1^y \dot{\omega}_1^y + L_1[a(c_1 \ddot{q}_6^z + s_1 \ddot{q}_6^x) + b(c_1 \dot{s}_{12} - s_1 \dot{c}_{12})],$$

где $J_2^y = J_{02}^y + m_3 L_2^2$, $J_1^y = J_{01}^y + m_2 L_1^2$.

Если в исходном положении МС на рис. 3 массы тел 3-й подсистемы распределены симметрично оси $O_3 \bar{y}$, то $J_{0i}^x = J_{0i}^z$, т. е. $B_i = 0$, $A_i = -D_i$, где $i = 3, 4, 5, 6$. Следовательно,

$$\dot{K}_6 = J_{06}^y \dot{\omega}_6^y,$$

$$\dot{K}_5 = J_{05}^z \dot{\omega}_5^z - J_{06}^z(s_6 \dot{\omega}_6^x - c_6 \dot{\omega}_6^z) + D_5 \omega_5^x \omega_5^y + D_6 \omega_6^y (c_6 \omega_6^x + s_6 \omega_6^z),$$

$$\dot{K}_3 = J_{13}^y \dot{\omega}_3^y + J_{05}^x s_5 \dot{\omega}_5^x + c_5 (J_{05}^y \dot{\omega}_5^y + J_{06}^y \dot{\omega}_6^y) + J_{06}^z (x_6^y \dot{\omega}_6^x + z_6^y \dot{\omega}_6^z) - D_5 s_5 \omega_5^y \omega_5^z +$$

$$+ D_6 \omega_6^y (z_6^y \omega_6^x - x_6^y \omega_6^z),$$

где $J_{13}^y = J_{03}^y + J_{04}^y$.

Таким образом, если $L_1 = L_2 = L$, то УД МС на рис. 3 в НК имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1^y \dot{\omega}_1^y + L_1[a(c_1 \ddot{q}_6^z + s_1 \ddot{q}_6^x) + b(c_1 \ddot{s}_{12} - s_1 \ddot{c}_{12})] = M_1 - M_2, \\ J_2^y \dot{\omega}_2^y + aL_2(s_{12} \ddot{q}_6^x + c_{12} \ddot{q}_6^z) + bL_1(c_{12} \ddot{s}_1 - s_{12} \ddot{c}_1) = M_2 - M_3, \\ J_{34}^y \dot{\omega}_3^y + J_{05}^x s_5 \dot{\omega}_5^x + J_{05}^y c_5 \dot{\omega}_5^y + J_{06}^z (x_6^y \dot{\omega}_6^x + z_6^y \dot{\omega}_6^z) + J_{06}^y c_5 \dot{\omega}_6^y - \\ - aL[q_6^z(\ddot{c}_1 + \ddot{c}_{12}) + q_6^x(\ddot{s}_1 + \ddot{s}_{12})] - D_5 s_5 \omega_5^y \omega_5^z + D_6 \omega_6^y (z_6^y \omega_6^x - x_6^y \omega_6^z) = M_3, \\ m_4 \ddot{q}_4 + a \ddot{c}_5 - m_4 g = F_4, \\ J_{05}^z \dot{\omega}_5^z - J_{06}^z (s_6 \dot{\omega}_6^x - c_6 \dot{\omega}_6^z) + aLc_5[s_{13}(\ddot{s}_1 + \ddot{s}_{12}) + c_{13}(\ddot{c}_1 + \ddot{c}_{12})] - a s_5 \ddot{q}_4 + \\ + D_5 \omega_5^x \omega_5^y + D_6 \omega_6^y (c_6 \omega_6^x + s_6 \omega_6^z) + a g s_5 = M_5, \\ J_{06}^y \dot{\omega}_6^y = M_6. \end{array} \right.$$

Для перехода к УД в углах поворота тел выпишем формулы вычисления проекций $\omega_k^x, \omega_k^y, \omega_k^z$ через углы относительного поворота тел и их производные по времени. Для этого используем формулу сложения угловых скоростей $\bar{\omega}_k = \bar{\omega}_{k-1} + \dot{q}_k \bar{q}_k$. Тогда последовательно получим $\bar{\omega}_1 = \dot{q}_1 \bar{y} = \dot{q}_1 \bar{y}_1$, $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1 + \dot{q}_2 \bar{y}_2 = \dot{q}_{12} \bar{y}_2$, $\bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_2 + \dot{q}_3 \bar{y}_3 = \dot{q}_{13} \bar{y}_3$, $\bar{\omega}_5 = \bar{\omega}_3 + \dot{q}_5 \bar{q}_5 = \dot{q}_{13} \bar{y}_3 + \dot{q}_5 \bar{z}_5$. Из рис. 3 видно, что $\bar{y}_3 = c_5 \bar{y}_5 + s_5 \bar{x}_5$. Тогда $\bar{\omega}_5 = \dot{q}_{13}(c_5 \bar{y}_5 + s_5 \bar{x}_5) + \dot{q}_5 \bar{z}_5$ и, следовательно, $\omega_5^x = s_5 \dot{q}_{13}$, $\omega_5^y = c_5 \dot{q}_{13}$, $\omega_5^z = \dot{q}_5$. Отсюда $\dot{\omega}_5^x = s_5 \ddot{q}_{13} + c_5 \dot{q}_{13} \dot{q}_5 = s_5 \ddot{q}_{13} + \omega_5^y \dot{q}_5$, $\dot{\omega}_5^y = c_5 \ddot{q}_{13} - s_5 \dot{q}_{13} \dot{q}_5 = c_5 \ddot{q}_{13} - \omega_5^x \dot{q}_5$.

Аналогично $\bar{\omega}_6 = \bar{\omega}_5 + \dot{q}_6 \bar{y}_6 = \omega_5^x \bar{x}_5 + \omega_5^y \bar{y}_6 + \dot{q}_5 \bar{z}_5 + \dot{q}_6 \bar{y}_6$, $\bar{x}_5 = c_6 \bar{x}_6 + s_6 \bar{z}_6$, $\bar{z}_5 = -s_6 \bar{x}_6 + c_6 \bar{z}_6$, $\bar{\omega}_6 = \omega_5^x (c_6 \bar{x}_6 + s_6 \bar{z}_6) + (\omega_5^y + \dot{q}_6) \bar{y}_6 + \dot{q}_5 (-s_6 \bar{x}_6 + c_6 \bar{z}_6)$, $\omega_6^x = c_6 \omega_5^x - s_6 \dot{q}_5$, $\omega_6^y = \omega_5^y + \dot{q}_6$, $\omega_6^z = s_6 \omega_5^x + c_6 \dot{q}_5$, $\dot{\omega}_6^x = c_6 \dot{\omega}_5^x - s_6 \ddot{q}_5 - s_6 \dot{q}_6 \omega_5^x - c_6 \dot{q}_5 \dot{q}_6 = c_6 \dot{\omega}_5^x - s_6 \ddot{q}_5 - \omega_6^z \dot{q}_6$, $\dot{\omega}_6^y = \dot{\omega}_5^y + \ddot{q}_6$, $\dot{\omega}_6^z = s_6 \dot{\omega}_5^x + c_6 \dot{q}_5 + c_6 \dot{q}_6 \omega_5^x - s_6 \dot{q}_5 \dot{q}_6 = s_6 \dot{\omega}_5^x + c_6 \dot{q}_5 + \omega_6^x \dot{q}_6$.

В табл. 3 неизвестны выражения НК q_6^x, q_6^z . Их можно выписать по общим формулам или вывести путем элементарных рассуждений на основе КС на рис. 3. Действительно, из рис. 3 видно, что $\bar{q}_6 = \bar{y}_5$, $\bar{y}_5 = c_5 \bar{y} - s_5 \bar{x}_3$, $\bar{x}_3 = c_{13} \bar{x} - s_{13} \bar{z}$. Следовательно, $\bar{q}_6 = c_5 \bar{y} - s_5 (c_{13} \bar{x} - s_{13} \bar{z})$, т. е. $q_6^x = y_5^x = -c_{13} s_5$, $q_6^z = y_5^z = s_{13} s_5$. Отсюда $\ddot{q}_6^x = (-\dot{c}_{13} s_5 - c_{13} \dot{s}_5)'_t = -s_5 \ddot{c}_{13} - c_{13} \dot{s}_5 + 2s_{13} c_5 \dot{q}_{13} \dot{q}_5$, $\ddot{q}_6^z = (\dot{s}_{13} s_5 + s_{13} \dot{s}_5)'_t = s_5 \ddot{s}_{13} + s_{13} \dot{s}_5 + 2c_{13} c_5 \dot{q}_{13} \dot{q}_5$. Теперь для перехода от УД в НК к УД в относительных углах поворота тел достаточно воспользоваться свойствами (7), (8) простых НК, а также следующими свойствами:

$$\begin{aligned} s_\alpha \ddot{s}_\beta + c_\alpha \ddot{c}_\beta &= \sin(\alpha - \beta) \ddot{\beta} - \cos(\alpha - \beta) \dot{\beta}^2, \\ c_\alpha \ddot{s}_\beta - s_\alpha \ddot{c}_\beta &= \cos(\alpha - \beta) \ddot{\beta} - \sin(\alpha - \beta) \dot{\beta}^2, \end{aligned}$$

где $s_\alpha = \sin(\alpha), \dots, c_\beta = \cos(\beta)$. Эти формулы проверяются путем элементарных вычислений.

После перехода к относительным углам поворота тел и их производным по времени получим следующие УД МС на рис. 3:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{d1} \ddot{q}_1 + L_b (c_2 \ddot{q}_{12} - s_2 \ddot{q}_{12}^2) + L_a [s_5 (c_{23} \ddot{q}_{13} - s_{23} \ddot{q}_{13}^2) + s_{23} (c_5 \ddot{q}_5 - s_5 \ddot{q}_5^2) + \\ + 2c_{23} c_5 \dot{q}_{13} \dot{q}_5] = M_1 - M_2, \\ I_{d2} \ddot{q}_{12} + L_b (c_2 \ddot{q}_1 + s_2 \ddot{q}_1^2) + L_a [s_5 (c_3 \ddot{q}_{13} - s_3 \ddot{q}_{13}^2) + s_3 (c_5 \ddot{q}_5 - s_5 \ddot{q}_5^2) + \\ + 2c_3 c_5 \dot{q}_{13} \dot{q}_5] = M_2 - M_3, \\ L_a s_5 (c_{23} \ddot{q}_1 + c_3 \ddot{q}_{12} + s_{23} \ddot{q}_1^2 + s_3 \ddot{q}_{12}^2) + J_{06}^y c_5 \ddot{q}_6 + (I_{36}^c + I_{56}^c c_5^2) \ddot{q}_{13} + \\ + s_5 (I_e c_5 \dot{q}_{13} - I_d \dot{q}_6) \dot{q}_5 = M_3, \\ m_4 \ddot{q}_4 - a (s_5 \ddot{q}_5 + c_5 \ddot{q}_5^2) - m_4 g = F_4, \\ L_a c_5 (s_{23} \ddot{q}_1 + s_3 \ddot{q}_{12} - c_{23} \ddot{q}_1^2 - c_3 \ddot{q}_{12}^2) + I_{56}^x \ddot{q}_5 - s_5 [a \ddot{q}_4 - (D c_5 \dot{q}_{13} + I_d \dot{q}_6) \dot{q}_{13}] + \\ + a g s_5 = M_5, \\ J_{06}^y (c_5 \ddot{q}_{13} + \ddot{q}_6 - s_5 \dot{q}_{13} \dot{q}_5) = M_6, \end{array} \right.$$

где использованы следующие обозначения констант: $L_b = Lb, L_a = La$,

$$I_{d1} = J_{01}^y + m_2 L^2, I_{d2} = J_{02}^y + m_3 L^2, I_{36}^c = J_{03}^y + J_{04}^y + I_{56}^x, I_{56}^x = J_{05}^x + J_{06}^x,$$

$$I_{56}^y = J_{05}^y + J_{06}^y, I_{56}^c = I_{56}^y - I_{56}^x, I_d = D_6 + J_{06}^x, D = D_5 + D_6, I_e = -I_{56}^c - D.$$

Дальнейшие упрощения этих УД практически невозможны.

3. Верификация УД

В ручном и автоматизированном (с применением ПЭВМ) режимах выписывания УД МС возможны ошибки и описки. Поэтому выписанные формулы необходимо верифицировать. Для этого мы используем JS-функцию СФСТОВ вычисления силовых факторов для систем тел с одной открытой ветвью. В случае определенного сочетания нулевых и отличных от нуля входных списков обобщенных координат (ОК), обобщенных скоростей (ОС) и обобщенных ускорений (ОУ) эта функция позволяет верифицировать УД МС. Функция СФСТОВ возвращает списки числовых значений обобщенных движущих сил (ОДС) $[Q_1, Q_2, \dots, Q_N]$, а также проекций динамических реакций в сочленениях на оси НСК.

JS-код функции СФСТОВ представлен в листинге 1. Из первой строки кода видно, что функция СФСТОВ имеет десять входных параметров. Девять параметров являются списками и последний – скаляром g (модуль ускорения свободного падения). Скалярные, векторные и матричные величины хранятся в списках. До комментария */* умножение матрицы на вектор */* запрограммированы формулы вычисления ОДС. Эти формулы опубликованы в статье [20]. Из двух последних строк видно, что функция СФСТОВ возвращает три списка. Первый из них содержит ОДС. После комментария */* умножение матрицы на вектор */* представлены очевидные коды вычисления матричных и векторных операций.

Перед обращением к функции СФСТОВ необходимо заполнить следующие списки постоянных входных параметров: коды кинематических пар (КП), где $КП(i) = 1$, если i -е тело вращательное, и $КП(i) = 0$, если i -е тело – поступательное; направляющие косинусы осей КП (НКОКП) в ССК тел КП; координаты баз полюсов тел (КБПТ) в ССК предшествующих тел; координаты центров масс (ЦМ) тел в их ССК; тензоры инерции тел (ТИТ) в центральных ССК этих тел. Для МС на рис. 3 в листинге 2 приведен пример заполнения этих списков.

Для верификации УД МС можно использовать функцию СФСТОВ следующим образом. Если для всех k положить $\dot{q}_k = \ddot{q}_k = 0$, то $Q_k = G_k$.

JS-функция решения первой задачи динамики МС

Листинг 1

Listing 1

JS-function for solving the first problem of dynamics of manipulation systems

```
function СФСТОВ(КП,НКОКП,КБПТ,МТ,ЦМ,ТИТ,ОК,ОС,ОУ,g){ var N = КП.length-1, i,
qx, qy, qz, c, s, c1, МП=[], МП0=[[],[]], МПТ=[], КПТ=[], АУЦМ=[], АУС=[],
АУУ = [], АУП = [], АКГВС = [], АКГМС = [], ОДС = [], F = [], M = [];
for(var i = 0; i <= N; i++){ МП[i] = []; /* Вычисление МП */
if(КП[i] === 0) { МП[i]=[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1] }
else {qx = НКОКП[i][0]; qy = НКОКП[i][1]; qz = НКОКП[i][2];
c = Math.cos(ОК[i]); s = Math.sin(ОК[i]); c1 = 1 - c;
МП[i]=[qx*qx*c1+c, qx*qy*c1-qz*s, qx*qz*c1+qy*s],
[qx*qy*c1+qz*s, qy*qy*c1+c, qy*qz*c1-qx*s],
[qx*qz*c1-qy*s, qy*qz*c1+qx*s, qz*qz*c1+c] }; МПТ[i] = трансп(МП[i] );
/* Вычисление АУС, АУУ, АУП */
АУС[0] = ЧВ(КП[0]*ОС[0], НКОКП[0]); АУУ[0] = ЧВ(КП[0]*ОУ[0], НКОКП[0]);
АУП[0] = ЧВ((1-КП[0])*ОУ[0], НКОКП[0]);
АУЦМ[0] = СВ(ВП(АУУ[0],ЦМ[0]), ВП(АУС[0],ВП(АУС[0],ЦМ[0]))); МП0[0] = МПТ[0];
for(i = 1; i <= N; i++){ КПТ[i] = СВ(КБПТ[i], ЧВ((1-КП[i])*ОК[i], НКОКП[i]));
АУС[i] = МВ(МПТ[i], СВ(АУС[i-1], ЧВ(КП[i]*ОС[i], НКОКП[i])));
АУП[i]=МВ(МПТ[i],СВ(АУП[i-1],ВП(АУУ[i-1],КПТ[i]),ВП(АУС[i-1],
ВП(АУС[i-1],КПТ[i])), ЧВ((1-КП[i]), СВ(ЧВ(ОУ[i], НКОКП[i]),
ЧВ(2*ОС[i], ВП(АУС[i-1], НКОКП[i])))))));
АУУ[i] = МВ(МПТ[i], СВ(АУУ[i-1], ЧВ(КП[i],(СВ(ЧВ(ОУ[i], НКОКП[i]),
ЧВ(ОС[i], ВП(АУС[i-1], НКОКП[i])))))));
АУЦМ[i] = СВ(ВП(АУУ[i], ЦМ[i]), ВП(АУС[i], ВП(АУС[i], ЦМ[i])));
МП0[i] = УМ(МПТ[i], МП0[i-1] ); /* Вычисление сил и моментов сил */
F[N] = ЧВ(МТ[N], СВ(АУП[N], РВ(АУЦМ[N], МВ(МП0[N], [0,-g,0]))));
M[N]=СВ(МВ(ТИТ[N],АУУ[N]), ВП(АУС[N], МВ(ТИТ[N],АУС[N])), ВП(ЦМ[N],F[N]));
for(i = N-1; i >= 0; i--){ F[i]=СВ(ЧВ(МТ[i], СВ(АУП[i], РВ(АУЦМ[i],
МВ(МП0[i], [0,-g,0])))), МВ(МП[i+1], F[i+1]));
```

```

M[i] = СВ(МВ(ТИТ[i],АУУ[i]), ВП(АУС[i],МВ(ТИТ[i],АУС[i])), ВП(ЦМ[i], F[i]),
    ВП(РВ(КПТ[i+1], ЦМ[i]), МВ(МП[i+1], F[i+1])), МВ(МП[i+1], M[i+1])) );
/* Вычисление ОДС */
for(i = 0; i <= N; i++) { if(КП[i] === 0) { ОДС[i] = СП(НКОКП[i], F[i]) }
    else { ОДС[i] = СП(НКОКП[i], M[i]) } } return [ОДС,F,M] };
/* умножение матрицы на вектор */
function МВ(A, b) {var C = [0,0,0]; for(var i = 0; i <= 2; i++) {
    for(var j = 0; j <= 2; j++) { C[i] += A[i][j]*b[j] } } return C };
/* умножение матрицы на число */
function МЧ(A, b) { for(var i = 0; i <= 2; i++) {
    for(var j = 0; j <= 2; j++) { A[i][j] = A[i][j]*b } } return A };
function УМ(A,B) { var C = [[0,0,0],[0,0,0],[0,0,0]]; /* умножение матриц */
    for (var k = 0; k <= 2; k++){ for (var i = 0; i <= 2; i++) {
        for (var j=0; j<=2; j++){ C[i][k]+=A[i][j]*B[j][k] } } } return C };
/* скалярное произведение векторов */
function СП(a, b) { return a[0]*b[0] + a[1]*b[1] + a[2]*b[2] };
function ВП(a, b) { /* векторное произведение */
    return [a[1]*b[2]-b[1]*a[2], a[2]*b[0]-b[2]*a[0], a[0]*b[1]-b[0]*a[1] ];
/* умножение числа на вектор */
function ЧВ(num, a) { return [num*a[0], num*a[1], num*a[2]] };
/* сумма векторов */
function СВ(){ for(var i = 0, x = 0, y = 0, z = 0; i < arguments.length; i++){
    x+=arguments[i][0]; y+=arguments[i][1]; z+=arguments[i][2] } return [x,y,z] };
/* разность двух векторов */
function РВ(a, b) { return [a[0]-b[0], a[1]-b[1], a[2]-b[2]] };
function трансп(matrix) { /* транспонирование матрицы */
    return matrix[0].map((col, i) => matrix.map(row => row[i])) }

```

Листинг 2

Верификация УД МС на рис. 3

Listing 2

Verification of the equations of dynamics of manipulation systems in Fig. 3

```

<html> <head> <script src="вычислениеОДС.js"> </script>
<script> onload = function() { // Вычисление ОДС с помощью ПО
    var m01=10, m02=8, m03=5, m04=3, m05=2, m06=1, // массы тел
    // главные центральные моменты инерции тел
    Icx1=0.6, Icy1=0.9, Icx2=0.4, Icy2=0.8, Icx3=0.6, Icy3=0.3,
    Icx4=0.5, Icy4=0.2, Icx5=0.4, Icy5=0.1, Icx6=0.3, Icy6=0.1,
    // расстояния от полюсов тел до их центров масс
    A1=0.2, A2=0.3, B3=0.4, B4=0.2, B5=0.1, B6=0.07, L1=0.5, L2=0.5,
    // обобщенные ускорения, скорости и координаты
    qtt1=2.3, qtt2=3.2, qtt3=1.3, qtt4=2.1, qtt5=1.1, qtt6=2.1, g=9.81, qt1=3.2,
    qt2=2.2, qt3=4.1, qt4=2.1, qt5=4.1, qt6=2.1, q1=3.2, q2=2.2, q3=4.1, q4=2.1,
    q5=1.1, q6=2.1, q12=q1+q2; q13=q12+q3; q23=q2+q3; qt12=qt1+qt2; qt13=qt12+qt3;
    qtt12=qtt1+qtt2; qtt13=qtt12+qtt3; // списки входных параметров
    var КП = [1,1,1,0,1,1], МТ = [m01,m02,m03,m04,m05,m06],
    НКОКП = [[0,1,0],[0,1,0],[0,1,0],[0,-1,0],[0,0,1],[0,1,0]],
    КБПТ = [[0,0,0], [L1,0,0], [L2,0,0], [0,0,0], [0,0,0], [0,0,0]],
    ЦМ = [[A1,0,0],[A2,0,0],[0,-B3,0],[0,B4,0],[0,-B5,0],[0,-B6,0]],
    ТИТ=[[Icx1,0,0],[0,Icy1,0],[0,0,Icy1]], [[Icx2,0,0],[0,Icy2,0],[0,0,Icy2]],
    [[Icx3,0,0],[0,Icy3,0],[0,0,Icx3]], [[Icx4,0,0],[0,Icy4,0],[0,0,Icx4]],
    [[Icx5,0,0],[0,Icy5,0],[0,0,Icx5]], [[Icx6,0,0],[0,Icy6,0],[0,0,Icx6]]],
    ОК=[q1,q2,q3,q4,q5,q6], ОС=[qt1,qt2,qt3,qt4,qt5,qt6],
    ОУ=[qtt1,qtt2,qtt3,qtt4,qtt5,qtt6];
    var ответ = СФСТОВ(КП, НКОКП, КБПТ, МТ, ЦМ, ТИТ, ОК, ОС, ОУ, g);
    // Вычисление движущих сил и моментов сил по выписанным формулам
    m5=m05+m06; m4=m04+m5; m3=m03+m4; m2=m02+m3; // массы подсистем
    a=m05*B5+m06*B6; b=m02*A2+m3*L2; // параметры статических моментов
    Ix6=Icx6+m06*B6*B6; Ix5=Icx5+m05*B5*B5; Ix34=Icy3+Icy4; // моменты инерции

```

```

Iq5=Ix5+Ix6; D5=Icy5-Ix5; D6=Icy6-Ix6; Id2=Icy2+m02*A2*A2+m3*L2*L2;
Id1=Icy1+m01*A1*A1+m2*L1*L1; La=L1*a; Ix56=Ix5+Ix6; D=D5+D6;
Id=D6+Ix6; Iy56=Icy5+Icy6; Ie=Ix56-Iy56-D5-D6; If=D6+Ix6;
c1=Math.cos(q1); s1=Math.sin(q1); // косинусы и синусы углов поворота тел
c2=Math.cos(q2); s2=Math.sin(q2); c3=Math.cos(q3); s3=Math.sin(q3);
c5=Math.cos(q5); s5=Math.sin(q5); c6=Math.cos(q6); s6=Math.sin(q6);
c12=Math.cos(q12); s12=Math.sin(q12); c13=Math.cos(q13); s13=Math.sin(q13);
c23=Math.cos(q23); s23=Math.sin(q23);
// движущие моменты сил
M3=La*s5*(c23*qtt1+c3*qtt12+s23*qt1*qt1+s3*qt12*qt12)+Icy6*c5*qtt6+
(Ic34+Ix56*s5*s5+Iy56*c5*c5)*qtt13+Ie*s5*c5*qt13*qt5-If*s5*qt5*qt6;
M2=M3+Id2*qtt12+b*L1*(c2*qtt1+s2*qt1*qt1)+
a*L2*(s5*(c3*qtt13-s3*qt13*qt13)+s3*(c5*qtt5-s5*qt5*qt5)+2*c3*c5*qt13*qt5);
M1=M2+Id1*qtt1+b*L1*(c2*qtt12-s2*qt12*qt12)+a*L1*(s5*(c23*qtt13-
s23*qt13*qt13)+s23*(c5*qtt5-s5*qt5*qt5)+2*c23*c5*qt13*qt5);
M5=La*c5*(s23*qtt1+s3*qtt12-c23*qt1*qt1-c3*qt12*qt12)+Ix56*qtt5-
s5*(a*qtt4-(D*c5*qt13+Id*qt6)*qt13)+g*a*s5;
F4=m4*qtt4-a*(s5*qtt5+c5*qt5*qt5)-m4*g; M6=Icy6*(c5*qtt13+qtt6-s5*qt13*qt5);
document.getElementById("вывод").innerHTML= // результат верификации
"Обобщенные движущие силы:<br/>" +ответ[0].join("<br/>")+ "<br/>M1=" +M1+
"<br/>M2=" +M2+"<br/>M3=" +M3+"<br/>F4=" +F4+"<br/>M5=" +M5+"<br/>M6=" +M6;
} </script> </head> <body> <div id="вывод"></div> </body> </html>

```

Следовательно, должно совпасть значение Q_k , вычисленное функцией СФСТОВ, и значение G_k , вычисленное по верифицируемой формуле. Так проверяется на отсутствие ошибок формула вычисления G_k . Если необходимо проверить формулу вычисления H_{kj} , то в k -м УД достаточно положить $\ddot{q}_j > 0$ и тогда $Q_k = H_{kj}\ddot{q}_j + G_k$. Для проверки, например, инерционных сил k -го УД, достаточно считать отличными от нуля только скорости, и так далее.

Код верификация УД на рис. 3 приведен в листинге 2.

4. Доказательство утверждений

С целью сокращения записей будем использовать символы ξ, η, ζ , принимающие значения на множестве $\{x, y, z\}$ имен осей СК. Тогда НК орта \bar{p}_i в НСК будем записывать как p_i^η , где $\eta \in \{x, y, z\}$, а скалярное произведение орта \bar{q}_j на орт $\bar{\eta}_k$ оси $O_k\bar{\eta}_k$ ГСК(k) будем записывать как q_{jk}^η . Смешанное произведение орт осей НСК будем коротко записывать в виде $\bar{\eta} \times \bar{\xi} \cdot \bar{\zeta} = \epsilon_{\eta\xi\zeta}$, где $\epsilon_{\eta\xi\zeta}$ – символ Леви-Чивиты [19].

Записи формул значительно сокращаются, если использовать знаки суммирования по неммым символьным индексам ξ, η, ζ . Например, формулы (6) можно коротко записать в виде $\omega_k^x = \sum_\xi z_k^\xi \dot{y}_k^\xi$, $\omega_k^y = \sum_\eta x_k^\eta \dot{z}_k^\eta$, $\omega_k^z = \sum_\zeta y_k^\zeta \dot{x}_k^\zeta$.

Из утверждений 2 и 4 статьи [18] следует, что силу \bar{F}_j , действующую на j -е тело со стороны $(j-1)$ -го тела, можно вычислить по формуле

$$\bar{F}_j = m_j \sum_{i=1}^j \bar{R}_i + \bar{m}_j - m_j \bar{g}.$$

Тогда, используя разложения $\bar{g} = -g\bar{y}$, $\bar{R}_i = \sum_\eta R_i^\eta \bar{\eta}$, $\bar{m}_j = \sum_\eta m_j^\eta \bar{\eta}$ и определение $F_j = \bar{p}_j \cdot \bar{F}_j$, получим

$$F_j = \bar{p}_j \cdot m_j \sum_{i=1}^j \sum_\eta \dot{R}_i^\eta \bar{\eta} + \bar{p}_j \cdot \sum_\eta \dot{m}_j^\eta \bar{\eta} + m_j g \bar{p}_j \cdot \bar{y}.$$

Отсюда с учетом обозначений $p_j^\eta = \bar{p}_j \cdot \bar{\eta}$, $R_{1j}^\eta = \sum_{i=1}^j R_i^\eta$ следует формула

$$F_j = \sum_\eta p_j^\eta (m_j \dot{R}_{1j}^\eta + \dot{m}_j^\eta) + m_j g p_j^y.$$

Развертывая в ней сумму по η , получим искомую формулу (2).

Из утверждений 1 и 7 статьи [18] следует, что момент силы \bar{M}_j , действующий на j -е тело со стороны $(j-1)$ -го тела, можно вычислять по формуле

$$\bar{M}_j = \bar{m}_j \times \sum_{i=1}^j \bar{R}_i + \sum_{k=j+1}^N (m_k \bar{R}_k \times \bar{R}_k + \bar{R}_k \times \bar{m}_k + \bar{m}_k \times \bar{R}_k) + \bar{K}_j + \bar{G}_j,$$

где $\bar{K}_j = \sum_{k=j}^N (J_{ok} \cdot \bar{\omega}_k)'_t$; $\bar{G}_j = \bar{g} \times \bar{m}_j$; J_{ok} – тензор инерции k -го тела в его ГСК с началом в полюсе O_k ; $\bar{\omega}_k$ – абсолютная угловая скорость k -го тела. Для слагаемых формулы вычисления движущего момента силы $M_j = \bar{q}_j \cdot \bar{M}_j$ выведем искомые представления. Для этого разложим векторы \bar{q}_j , \bar{m}_k , \bar{R}_k по ортам НСК, приведем подобные при ортах НСК и используем символ Леви-Чивиты. Тогда получим

$$\bar{q}_j \cdot \bar{m}_j \times \sum_{i=1}^j \bar{R}_i = \sum_{\zeta} q_j^{\zeta} \bar{\zeta} \cdot \sum_{\eta} m_j^{\eta} \bar{\eta} \times \sum_{i=1}^j \sum_{\xi} \ddot{R}_i^{\xi} \bar{\xi} = \sum_{\zeta} q_j^{\zeta} \sum_{\eta} \sum_{\xi} \bar{\eta} \times \bar{\xi} \cdot \bar{\zeta} m_j^{\eta} \sum_{i=1}^j \ddot{R}_i^{\xi} = \sum_{\zeta} \sum_{\eta} \sum_{\xi} \epsilon_{\eta\xi\zeta} q_j^{\zeta} m_j^{\eta} \ddot{R}_i^{\xi}.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \bar{q}_j \cdot (m_k \bar{R}_k \times \bar{R}_k + \bar{R}_k \times \bar{m}_k + \bar{m}_k \times \bar{R}_k) &= \\ = \bar{q}_j \cdot (m_k \sum_{\eta} R_k^{\eta} \bar{\eta} \times \sum_{\xi} \ddot{R}_k^{\xi} \bar{\xi} + \sum_{\eta} R_k^{\eta} \bar{\eta} \times \sum_{\xi} \ddot{m}_k^{\xi} \bar{\xi} + \sum_{\xi} m_k^{\xi} \bar{\xi} \times \sum_{\eta} \ddot{R}_k^{\eta} \bar{\eta}) &= \\ = \sum_{\zeta} q_j^{\zeta} \bar{\zeta} \cdot (m_k \sum_{\eta} R_k^{\eta} \sum_{\xi} \ddot{R}_k^{\xi} \bar{\eta} \times \bar{\xi} + \sum_{\eta} R_k^{\eta} \sum_{\xi} \ddot{m}_k^{\xi} \bar{\eta} \times \bar{\xi} + \sum_{\xi} m_k^{\xi} \sum_{\eta} \ddot{R}_k^{\eta} \bar{\xi} \times \bar{\eta}) &= \\ = \sum_{\eta} \sum_{\xi} \sum_{\zeta} q_j^{\zeta} (m_k R_k^{\eta} \ddot{R}_k^{\xi} + R_k^{\eta} \ddot{m}_k^{\xi} - m_k^{\xi} \ddot{R}_k^{\eta}) \bar{\eta} \times \bar{\xi} \cdot \bar{\zeta}. \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в формулу $M_j = \bar{q}_j \cdot \bar{M}_j$. Тогда получим

$$M_j = \sum_{\eta} \sum_{\xi} \sum_{\zeta} \epsilon_{\eta\xi\zeta} q_j^{\zeta} [m_j^{\eta} \sum_{i=1}^j \ddot{R}_i^{\xi} + \sum_{k=j+1}^N (m_k R_k^{\eta} \ddot{R}_k^{\xi} + R_k^{\eta} \ddot{m}_k^{\xi} - m_k^{\xi} \ddot{R}_k^{\eta})] + \dot{K}_j + G_j.$$

Если в этой формуле развернуть суммы по неммым символьным индексам ξ, η, ζ , учесть значения символов Леви-Чивиты и обозначения $M_{j+1}^x, M_{j+1}^y, M_{j+1}^z$, то получим искомые формулы (3).

Приведем вектор \bar{K}_j к оси $O_j \bar{q}_j$, используем диадное представление тензора инерции k -го тела в его ГСК, разложим вектор $\bar{\omega}_k$ на оси этой ГСК, внесем орты НСК под знак производной по времени и используем равенство $\bar{\xi}_k \cdot \sum_{\eta} \omega_k^{\eta} \bar{\eta}_k = \omega_k^{\xi}$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \dot{K}_j &= \bar{q}_j \cdot \sum_{k=j}^N (J_{ok} \cdot \bar{\omega}_k)'_t = \bar{q}_j \cdot \sum_{k=j}^N (\sum_{\xi} J_{ok}^{\xi} \bar{\xi}_k \bar{\xi}_k \cdot \sum_{\eta} \omega_k^{\eta} \bar{\eta}_k)'_t = \\ &= \sum_{\zeta} q_j^{\zeta} \bar{\zeta} \cdot \sum_{k=j}^N \sum_{\xi} J_{ok}^{\xi} (\bar{\xi}_k \omega_k^{\xi})'_t = \sum_{\zeta} q_j^{\zeta} \sum_{k=j}^N \sum_{\xi} J_{ok}^{\xi} (\bar{\zeta} \cdot \bar{\xi}_k \omega_k^{\xi})'_t = \sum_{k=j}^N \sum_{\zeta\xi} J_{ok}^{\xi} q_j^{\zeta} (\bar{\xi}_k^{\zeta} \omega_k^{\xi})'_t. \end{aligned}$$

После вычисления производной получим $\dot{K}_j = \sum_{k=j}^N \sum_{\zeta\xi} (J_{ok}^{\xi} q_j^{\zeta} \bar{\xi}_k^{\zeta} \dot{\omega}_k^{\xi} + J_{ok}^{\xi} q_j^{\zeta} \bar{\xi}_k^{\zeta} \omega_k^{\xi})$. Разложим орт $\bar{\xi}_k$ ГСК(k) по ортам НСК. Тогда получим $\bar{\xi}_k = \sum_{\eta} \xi_k^{\eta} \bar{\eta}$. Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_k \cdot \bar{\zeta} &= \sum_{\eta} \xi_k^{\eta} \bar{\eta} \cdot \bar{\zeta} = \xi_k^{\zeta} = \bar{\omega}_k \times \bar{\xi}_k \cdot \bar{\zeta} = \sum_{\eta} \omega_k^{\eta} \bar{\eta}_k \times \bar{\xi}_k \cdot \bar{\zeta} = \\ &= \sum_{\eta} \epsilon_{\eta\xi\zeta} \omega_k^{\eta} \bar{\nu}_k \cdot \bar{\zeta} = \sum_{\eta} \epsilon_{\eta\xi\zeta} \nu_k^{\zeta} \omega_k^{\eta}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{\zeta\xi} J_{ok}^{\xi} q_j^{\zeta} \bar{\xi}_k^{\zeta} \omega_k^{\xi} &= \sum_{\xi} J_{ok}^{\xi} \omega_k^{\xi} \sum_{\zeta} q_j^{\zeta} \bar{\xi}_k^{\zeta} = \sum_{\xi} J_{ok}^{\xi} \omega_k^{\xi} \sum_{\zeta} q_j^{\zeta} \sum_{\eta} \epsilon_{\eta\xi\zeta} \nu_k^{\zeta} \omega_k^{\eta} = \\ &= \sum_{\xi} J_{ok}^{\xi} \omega_k^{\xi} \sum_{\eta} \epsilon_{\eta\xi\zeta} \nu_k^{\zeta} \omega_k^{\eta} = \sum_{\xi} J_{ok}^{\xi} \omega_k^{\xi} \sum_{\eta} \epsilon_{\eta\xi\zeta} q_j^{\zeta} \omega_k^{\eta}. \end{aligned}$$

Теперь, учитывая представление $\sum_{\zeta} q_j^{\zeta} \bar{\xi}_k^{\zeta} = \bar{q}_j \cdot \bar{\xi}_k = q_{jk}^{\xi}$, получим

$$\dot{K}_j = \sum_{k=j}^N \sum_{\xi} J_{ok}^{\xi} (q_{jk}^{\xi} \dot{\omega}_k^{\xi} + \omega_k^{\xi} \sum_{\eta} \epsilon_{\eta\xi\zeta} q_{jk}^{\zeta} \omega_k^{\eta}).$$

Раскроем две последние суммы по ξ и η . Тогда получим

$$\begin{aligned} \sum_{\xi} J_{ok}^{\xi} \omega_k^{\xi} \sum_{\eta} \epsilon_{\eta\xi\zeta} q_{jk}^{\zeta} \omega_k^{\eta} &= \\ = J_{ok}^x \omega_k^x \sum_{\eta} \epsilon_{\eta x \zeta} q_{jk}^{\zeta} \omega_k^{\eta} + J_{ok}^y \omega_k^y \sum_{\eta} \epsilon_{\eta y \zeta} q_{jk}^{\zeta} \omega_k^{\eta} + J_{ok}^z \omega_k^z \sum_{\eta} \epsilon_{\eta z \zeta} q_{jk}^{\zeta} \omega_k^{\eta} &= \\ = J_{ok}^x \omega_k^x (\epsilon_{zxy} q_{jk}^y \omega_k^z + \epsilon_{yxz} q_{jk}^z \omega_k^y) + J_{ok}^y \omega_k^y (\epsilon_{xyz} q_{jk}^z \omega_k^x + \epsilon_{zyx} q_{jk}^x \omega_k^z) + \\ + J_{ok}^z \omega_k^z (\epsilon_{yzx} q_{jk}^x \omega_k^y + \epsilon_{xzy} q_{jk}^y \omega_k^x) q_{jk}^x (J_{ok}^z \omega_k^z \omega_k^y - J_{ok}^y \omega_k^y \omega_k^z) q_{jk}^y (J_{ok}^x \omega_k^x \omega_k^z - J_{ok}^z \omega_k^z \omega_k^x) + \\ + q_{jk}^z (J_{ok}^y \omega_k^y \omega_k^x - J_{ok}^x \omega_k^x \omega_k^y) q_{jk}^x (J_{ok}^x - J_{ok}^y) \omega_k^y \omega_k^z + q_{jk}^y (J_{ok}^x - J_{ok}^z) \omega_k^z \omega_k^x + q_{jk}^z (J_{ok}^y - J_{ok}^x) \omega_k^x \omega_k^y. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом обозначений A_k, B_k, D_k получим

$$\dot{K}_j = \sum_{k=j}^N (\sum_{\xi} J_{ok}^{\xi} q_{jk}^{\xi} \dot{\omega}_k^{\xi} + A_k q_{jk}^x \omega_k^y \omega_k^z + B_k q_{jk}^y \omega_k^x \omega_k^z + D_k q_{jk}^z \omega_k^x \omega_k^y),$$

что после развертывания сумм по ξ совпадает с формулой

$$\dot{K}_j = \sum_{k=j}^N [q_{jk}^x (J_{ok}^x \dot{\omega}_k^x + A_k \omega_k^y \omega_k^z) + q_{jk}^y (J_{ok}^y \dot{\omega}_k^y + B_k \omega_k^x \omega_k^z) + q_{jk}^z (J_{ok}^z \dot{\omega}_k^z + D_k \omega_k^x \omega_k^y)].$$

Если воспользоваться введенными в утверждении 1 обозначениями, то формула вычисления \dot{K}_{jk} примет искомый вид (4).

Приведем момент силы тяжести \bar{G}_j к оси $O_j \bar{q}_j$. Тогда получим

$$G_j = \bar{q}_j \cdot \bar{G}_j = \bar{q}_j \cdot \bar{g} \times \bar{m}_j = -g \sum_{\zeta} q_j^{\zeta} \bar{\zeta} \cdot \bar{y} \times \sum_{\eta} m_j^{\eta} \bar{\eta} = g \sum_{\zeta} \sum_{\eta} q_j^{\zeta} \bar{y} \times \bar{\zeta} \cdot \bar{\eta} m_j^{\eta},$$

т. е. $G_j = g \sum_{\zeta} \sum_{\eta} \epsilon_{y\zeta\eta} q_j^{\zeta} m_j^{\eta}$. Если в этой формуле развернуть суммы по неммым символьным индексам и учесть значения символов Леви-Чивиты, то получим искомую формулу (5).

Если $\bar{q}_{j-1} = \bar{q}_j$, то по формуле (3) получим

$$M_{j-1} = q_j^x (m_{j-1}^y \ddot{R}_{1j-1}^z - m_{j-1}^z \ddot{R}_{1j-1}^y + \dot{M}_j^x) + q_j^y (m_{j-1}^z \ddot{R}_{1j-1}^x - m_{j-1}^x \ddot{R}_{1j-1}^z + \dot{M}_j^y) + q_j^z (m_{j-1}^x \ddot{R}_{1j-1}^y - m_{j-1}^y \ddot{R}_{1j-1}^x + \dot{M}_j^z) + \dot{K}_{j-1} + G_{j-1}.$$

Прибавим и отнимем в этом выражении величины, необходимые для выделения в нем слагаемых правой части формулы вычисления M_j . Тогда получим:

$$M_{j-1} = q_j^x [(m_j^y + m_{j-1}^y - m_j^y)(\ddot{R}_{1j}^z - \ddot{R}_j^z) - (m_j^z + m_{j-1}^z - m_j^z)(\ddot{R}_{1j}^y - \ddot{R}_j^y) + \dot{M}_{j+1}^x + \dot{M}_{xj}] + q_j^y [(m_j^z + m_{j-1}^z - m_j^z)(\ddot{R}_{1j}^x - \ddot{R}_j^x) - (m_j^x + m_{j-1}^x - m_j^x)(\ddot{R}_{1j}^z - \ddot{R}_j^z) + \dot{M}_{j+1}^y + \dot{M}_{yj}] + q_j^z [(m_j^x + m_{j-1}^x - m_j^x)(\ddot{R}_{1j}^y - \ddot{R}_j^y) - (m_j^y + m_{j-1}^y - m_j^y)(\ddot{R}_{1j}^x - \ddot{R}_j^x) + \dot{M}_{j+1}^z + \dot{M}_{zj}] + \dot{K}_j + \dot{K}_{j-1,j-1} + G_j + G_{j-1} - G_j,$$

где

$$\begin{aligned} \dot{M}_{xj} &= m_j (R_j^y \ddot{R}_j^z - R_j^z \ddot{R}_j^y) + m_j^y \ddot{R}_j^z - R_j^z \dot{m}_j^y + R_j^y \dot{m}_j^z - m_j^z \ddot{R}_j^y, \\ \dot{M}_{yj} &= m_j (R_j^z \ddot{R}_j^x - R_j^x \ddot{R}_j^z) + m_j^z \ddot{R}_j^x - R_j^x \dot{m}_j^z + R_j^z \dot{m}_j^x - m_j^x \ddot{R}_j^z, \\ \dot{M}_{zj} &= m_j (R_j^x \ddot{R}_j^y - R_j^y \ddot{R}_j^x) + m_j^x \ddot{R}_j^y - R_j^y \dot{m}_j^x + R_j^x \dot{m}_j^y - m_j^y \ddot{R}_j^x. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} M_{j-1} &= M_j + q_j^x [-m_j^y \ddot{R}_j^z + (m_{j-1}^y - m_j^y)(\ddot{R}_{1j}^z - \ddot{R}_j^z) + m_j^z \ddot{R}_j^y - \\ &- (m_{j-1}^z - m_j^z)(\ddot{R}_{1j}^y - \ddot{R}_j^y) + \dot{M}_{xj}] + q_j^y [-m_j^z \ddot{R}_j^x + (m_{j-1}^z - m_j^z)(\ddot{R}_{1j}^x - \ddot{R}_j^x) + \\ &+ m_j^x \ddot{R}_j^z - (m_{j-1}^x - m_j^x)(\ddot{R}_{1j}^z - \ddot{R}_j^z) + \dot{M}_{yj}] + q_j^z [-m_j^x \ddot{R}_j^y + (m_{j-1}^x - m_j^x)(\ddot{R}_{1j}^y - \ddot{R}_j^y) + \\ &+ m_j^y \ddot{R}_j^x - (m_{j-1}^y - m_j^y)(\ddot{R}_{1j}^x - \ddot{R}_j^x) + \dot{M}_{zj}] + \dot{K}_{j-1,j-1} + G_{j-1} - G_j. \end{aligned}$$

Отсюда после подстановки выражений \dot{M}_{xj} , \dot{M}_{yj} , \dot{M}_{zj} , G_{j-1} , G_j и очевидных сокращений получим формулу утверждения 2.

Заключение

В данной работе впервые для МС с шестью степенями свободы в пространстве выписаны УД в аналитическом виде с явно выраженными геометрическими, кинематическими, статическими и инерционными параметрами тел. Причем сократить количество математических операций в этих УД практически невозможно, т. е. они оптимальны в смысле быстродействия вычислений. Еще недавно такой результат был практически не достижимым. Но методы математического моделирования МС развиваются и предоставляют новые возможности аналитического исследования МС.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 20-41-740019).

Литература

1. Adaptive Fractional PID Controller for Robot Manipulator / H. Delavari, R. Ghaderi, A.N. Ranjbar et al. // Proceedings of FDA'10. The 4th IFAC Workshop Fractional Differentiation and its Applications. Badajoz, Spain, October 18–20. – 2010. – P. 1–7.
2. Jafarov, E.M. A new variable structure PID-controller for robot manipulators with parameter perturbations: an augmented sliding surface approach / Elbrous M. Jafarov, Yorgo I Stefanopoulos, M.N. Alpaslan Parlakci // 15th Triennial World Congress, Barcelona, Spain. – 2002. – P. 365–370.
3. Xu, J. Robust Adaptive PID Control of Robot Manipulator with Bounded Disturbances/ Jian Xu, Lei Qiao // Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering. – 2013. – Vol. 2013. – Article ID 535437. – P. 1–13. DOI: 10.1155/2013/535437

4. *Chunqing, H. PID feedback for mixed Hi/Hco tracking control of robotic manipulators / Huang Chunqing, Shi Songjiao // Journal of Systems Engineering and Electronics. – 2004 – Vol. 15, no. 4. – P. 579–585.*
5. *Velocity Control of a Spherical Rolling Robot Using a Grey-PID Type Fuzzy Controller With an Adaptive Step Size / Erkan Kayacan, Erdal Kayacan, Herman Ramon, Wouter Saeys // 10th IFAC Symposium on Robot Control International Federation of Automatic Control. Dubrovnik, Croatia. – 2012. – P. 863–868.*
6. *Ghaleb, N.M. Modeling and Control of 2-DOF Robot Arm / Nasr M. Ghaleb, Ayman A. Aly // International Journal of Emerging Engineering Research and Technology. – 2018. – Vol. 6, iss. 11. – P. 24–31.*
7. *Amin, A.T.M. Adaptive controller algorithm for 2-DOF humanoid robot arm / Adam Tan Mohd Amin, Abdul Hakim Ab Rahim, Cheng Yee Low // Procedia Technology. – 2014. – Vol. 15. – P. 765–774. DOI: 10.1016/j.protcy.2014.09.049*
8. *Телегин, А.И. Уравнения математических моделей механических систем. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 1999. – 181 с.*
9. *Телегин, А.И. Алгоритмы решения первой задачи динамики для плоских рычажных механизмов / А.И. Телегин, М.В. Тимощенко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2007. – Вып. 10, № 25 (97). – С. 12–22.*
10. *Elshabasy, M. Power optimization of planar redundant manipulator moving along constrained-end trajectory using hybrid techniques / M. Elshabasy, K.T. Mohamed, A.A. Ata // Alexandria Engineering Journal. – 2017. – vol. 56, iss. 4. – P. 439–447. DOI: 10.1016/j.aej.2017.01.040*
11. *Dynamic characterization and simulation of two-link soft robot arm with pneumatic muscles / A. Hošovský, J. Piteř, K. Židek et al. // Mechanism and Machine Theory. – 2016. – No. 103. – P. 98–116. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2016.04.013*
12. *Korayem, M.H. Dynamic modeling of nonholonomic wheeled mobile manipulators with elastic joints using recursive Gibbs–Appell formulation / M.H. Korayem, A.M. Shafei, H.R. Shafei // Scientia Iranica. – 2012. – vol. 19, iss. 4. – P. 1092–1104. DOI: 10.1016/j.scient.2012.05.001*
13. *Propulsion Effect Analysis of 3Dof Robot under Gravity / A. Shala, R. Likaj, M. Bruqi, X. Bajrami // Procedia Engineering. – 2015. – Vol. 100. – P. 206–212.*
14. *Sadati, S.M.H. An Automatic Algorithm to Derive Linear Vector Form of Lagrangian Equation of Motion with Collision and Constraint / S.M.H. Sadati, S.E. Naghibi, M. Naraghi // Procedia Computer Science. – 2015. – Vol. 76. – P. 217–222. DOI: 10.1016/j.procs.2015.12.345*
15. *Fontes, J.V. On the dynamic performance of parallel kinematic manipulators with actuation and kinematic redundancies / J.V. Fontes, M.M. da Silva // Mechanism and Machine Theory. – 2016. – Vol. 103. – P. 148–166. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2016.05.004*
16. *Amin, A.T.M. Adaptive controller algorithm for 2-DOF humanoid robot arm / A.T.M. Amin, A.H.A. Rahim, C.Y. Low // Procedia Technology. – 2014. – Vol. 15. – P. 765–774.*
17. *Lewis, F.L. Robot Manipulator Control: Theory and Practice / F.L. Lewis, D.M. Dawson, C.T. Abdallah. – Marcel Dekker, Inc., New York, 2004. – 614 p.*
18. *Телегин, А.И. Новый векторный вид уравнений динамики систем тел / А.И. Телегин // Вестник ЮУрГУ, серия «Машиностроение». – 2014. – Т. 14, № 1. – С. 33–40.*
19. *Лурье, А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.*
20. *Войнов, И.В. Матрица-код вывода динамических реакций и обобщенных движущих сил в сочленениях роботов-манипуляторов / В.И. Войнов, А.И. Телегин, Д.Н. Тимофеев // IV Международная научно-техническая конференция «Пром-Инжиниринг». – 2018. – С. 265–269.*

Телегин Александр Иванович, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры автоматизации, Южно-Уральский государственный университет, филиал в г. Миассе, г. Миасс, teleginai@susu.ru.

Поступила в редакцию 28 апреля 2021 г.

FORMALISM OF WRITING OUT OF MANIPULATORS DYNAMIC EQUATION

A.I. Telegin, teleginai@susu.ru

South Ural State University, Miass, Russian Federation

The problem of cumbersome equations of dynamics for manipulation systems of industrial robots (manipulators) with translational and rotational joints is solved. A new formalism for writing out the equations of dynamics of manipulators by using of guide cosines is proposed. Examples of writing out equations of dynamics of manipulators with guide cosines are given. The equations of dynamics in relative angles of rotation of bodies are obtained with the help of these guide cosines by applying their properties. These manipulators have from three to six degrees of freedom. In their equations of dynamics the geometric, kinematic, static and inertial parameters are explicit. The multipliers for accelerations and products of velocities are optimal in the sense of the minimum of arithmetic operations (additions and multiplications) that are needed for their calculations in the written out equations of dynamics. JS-code and method for verification of the equations of dynamics of manipulators written in analytical form are proposed. The problem is that when the equations are written out manually, errors and oversights in the intermediate entries and the final result are possible. Therefore it is necessary to check the results of writing out for absence of errors, i.e. to perform verification of formulas for calculation of constitutive equations of dynamics. To do this, we can use software designed to calculate the generalized driving forces of manipulators, i.e. to solve the first problem of dynamics. Such software is offered as a web-application, in which JS-function is used for verification of the equations of dynamics of manipulators. The method of verification of formulas to calculate the generalized forces of gravity and multipliers (coefficients) for generalized accelerations and products of generalized velocities in the equations of dynamics is developed. An example of verification of the equations of dynamics of the universal manipulator with six degrees of freedom in space is given. **Aim.** The aim of research is to develop a formalism for writing out the analytical form of the equations of the manipulators' dynamics in the guide cosines of the principal axes of the coupled body coordinate systems, whose coefficients contain the minimum number of arithmetic operations. **Research methods.** The methods of research refer to vector and analytic mechanics of absolutely solid systems, to vector algebra, and to systems analysis and programming in scripting languages. **Results.** The results contain two proved statements, in which there are the formulas and the methodology that allow us to write manually the equations of dynamics of manipulators with three and six degrees of mobility both in guiding cosines and in generalized coordinates. In both cases it is impossible to simplify the obtained equations. **Conclusion.** The offered analytical types of the equations of dynamics occupy several lines. By the known classical formalisms (Lagrange, Appel, Nielsen, Newton-Euler, etc.) it is practically impossible to obtain similar results because of the large number of complex mathematical operations in their implementation and the cumbersomeness of the resulting formulas.

Keywords: industrial robot, equations of dynamics, prescription formalism, guide cosines, formula reuse, JS-function, equations verification.

References

1. Delavari H., Ghaderi R., Ranjbar N.A., HosseinNia S.H., Momani S. Adaptive Fractional PID Controller for Robot Manipulator. *Proceedings of FDA'10. The 4th IFAC Workshop Fractional Differentiation and its Applications*. Badajoz, Spain, October 18–20, 2010, pp. 1–7.
2. Jafarov Elbrous M., Istefanopulos Yorgo, Parlakci Mehmet Nur Alpaslan. A new variable structure PID-controller for robot manipulators with parameter perturbations: an augmented sliding surface approach. *15th Triennial World Congress*, Barcelona, Spain, 2002, pp. 365–370.
3. Xu Jian, Qiao Lei. Robust Adaptive PID Control of Robot Manipulator with Bounded Disturbances. *Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering*, 2013, vol. 2013, article ID 535437, pp. 1–13. DOI: 10.1155/2013/535437
4. Chunqing Huang, Songjiao Shi. PID feedback for mixed Hi/Hco tracking control of robotic manipulators. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2004, vol. 15, no. 4, pp. 579–585.

5. Kayacan Erkan, Kayacan Erdal, Ramon Herman, Saeys Wouter. Velocity Control of a Spherical Rolling Robot Using a Grey-PID Type Fuzzy Controller With an Adaptive Step Size. *10th IFAC Symposium on Robot Control International Federation of Automatic Control*. Dubrovnik, Croatia, September 5–7, 2012, pp. 863–868.
6. Nasr M. Ghaleb, Ayman A. Aly. Modeling and Control of 2-DOF Robot Arm. *International Journal of Emerging Engineering Research and Technology*, 2018, vol. 6, iss. 11, pp. 24–31.
7. Amin Adam Tan Mohd, Ab Rahim Abdul Hakim, Cheng Yee Low. Adaptive controller algorithm for 2-DOF humanoid robot arm. *Procedia Technology*, 2014, vol. 15, pp. 765–774. DOI: 10.1016/j.protcy.2014.09.049
8. Telegin A.I. *Uraveniya matematicheskikh modeley mekhanicheskikh sistem* [Equations of mathematical models of mechanical systems]. Chelyabinsk, South Ural St. Univ. Publ., 1999. 181 p.
9. Telegin A.I., Timoshchenko M.V. *Algoritmy resheniya pervoy zadachi dinamiki dlya ploskikh rychazhnykh mekhanizmov* [Algorithms for solving the first problem of dynamics for flat lever mechanisms]. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mechanical engineering industry*, 2007, iss. 10, no. 25 (97), pp. 12–22. (in Russ.)
10. Elshabasy M.M.Y.B., Mohamed K.T., Ata A.A. Power optimization of planar redundant manipulator moving along constrained-end trajectory using hybrid. *Alexandria Engineering Journal*, 2017, vol. 56, iss. 4, pp. 439–447. DOI: 10.1016/j.aej.2017.01.040
11. Hošovský A., Pítel J., Židek K., Tóthová M., Sárosi J., Cveticanin L. Dynamic characterization and simulation of two-link soft robot. *Mechanism and Machine Theory*, 2016, no. 103, pp. 98–116. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2016.04.013
12. Korayem M.H., Shafei A.M., Shafei H.R. Dynamic modeling of nonholonomic wheeled mobile manipulators with elastic joints using recursive Gibbs–Appell formulation. *Scientia Iranica*, 2012, vol. 19, iss. 4, pp. 1092–1104. DOI: 10.1016/j.scient.2012.05.001
13. Shala A., Likaj R., Bruqi M., Bajrami X. Propulsion Effect Analysis of 3Dof Robot under Gravity. *Procedia Engineering*, 2015, vol. 100, pp. 206–212.
14. Sadati S.M.H., Naghibi S.E., Naraghi M. An Automatic Algorithm to Derive Linear Vector Form of Lagrangian Equation of Motion with Collision and Constraint. *Procedia Computer Science*, 2015, vol. 76, pp. 217–222. DOI: 10.1016/j.procs.2015.12.345
15. Fontes J.V., da Silva M.M. On the dynamic performance of parallel kinematic manipulators with actuation and kinematic redundancies. *Mechanism and Machine Theory*, 2016, vol. 103, pp. 148–166. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2016.05.004
16. Amin A.T.M., Rahim A.H.A., Low C.Y. Adaptive controller algorithm for 2-DOF humanoid robot arm. *Procedia Technology*, 2014, vol. 15, pp. 765–774.
17. Lewis F.L., Dawson D.M., Abdallah C.T. *Robot Manipulator Control: Theory and Practice*, Marcel Dekker, Inc., New York, 2004. 614 p.
18. Telegin A.I. [A new vector form of the equations of dynamics of body systems]. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mechanical engineering industry*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 33–40. (in Russ.)
19. Lurie A.I. *Analiticheskaya mekhanika* [Analytical Mechanics]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961. 824 p.
20. Voinov I.V., Telegin A.I., Timofeev D.I. Maxima-Code for Derivation of Dynamic Reactions and Generalized Driving Forces in the Joints of Robotic Manipulators. *IV International Conference on Industrial Engineering*, 2018, pp. 265–269. (in Russ.)

Received 28 April 2021

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Телегин, А.И. Формализм выписывания уравнения динамики манипуляторов / А.И. Телегин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2021. – Т. 21, № 4. – С. 52–68. DOI: 10.14529/ctcr210405

FOR CITATION

Telegin A.I. Formalism of Writing Out of Manipulators Dynamic Equation. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2021, vol. 21, no. 4, pp. 52–68. (in Russ.) DOI: 10.14529/ctcr210405